Universidade Estadual Paulista - Unesp

Faculdade de Ciências e Tecnologia

Problemas elípticos no espaço das funções de variação limitada

Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

Março de 2021

Contents

1 Espaço das funções de variação limitada **9**

1.1 Definições e propriedades básicas 9

I Métodos variacionais no espaço das funções de variação limitada **17**

2 Aplicação 1: Operador $1-$Laplaciano em domínio limitado **18**

2.1 O funcional energia 19

2.2 A equação de Euler-Lagrange 21

2.3 Demonstração do Teorema 2.0.1 23

3 Aplicação 2: Operador 1-Laplaciano no $\mathbb{R}^N$ **31**

4 Um problema envolvendo o operador $1-$biharmônico **37**

4.1 O espaço $BL_0(\Omega)$ 38

4.1.1 O funcional energia 41

4.1.2 A equação de Euler-Lagrange 41

4.2 Demonstração do Teorema 4.0.1 43

II Aproximação por problemas envolvendo o operador $p-$laplaciano **45**

5 Soluções nodais para problemas envolvendo o operador $1-$laplaciano **46**

5.1 Preliminares 47
5.2 Demonstração do Teorema 5.0.1 48

6 Método de sub-supersolução para problemas envolvendo o operador 1-laplaciano 56

6.1 Decomposição de Du, a Regra da Cadeia em BV e a Fórmula de Green generalizada 58
6.2 Resultados técnicos 60
6.3 Demonstração do Teorema 6.0.2 66

Introdução

No estudo de várias equações diferenciais parciais evolutivas e elípticas, os chamados espaços de Sobolev, $W^{m,p}(\Omega)$, desempenham um papel central na definição de solução fraca e ainda na implementação de métodos variacionais. Esses são formados pelas funções de $L^p(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio regular, com derivadas distribucionais até ordem m geradas por funções que também pertencem a $L^p(\Omega)$. Esse é o caso de importantes equações como a Equação de Laplace, Poisson, Schrödinger, Dirac, etc. Entretanto, um grande número de problemas na física e no processamento de imagens digitais, requerem a introdução de um espaço de funções que permita a existência de descontinuidades em seus elementos.

Vejamos um exemplo que nos ajude a entender melhor essa questão. Consideremos o problema de curvatura média prescrita dado por

$$\begin{cases} -\text{div}\left(\dfrac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = f(x) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto com fronteira suave e f é uma função dada. Uma solução fraca de (0.1) é dada por $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$, tal que

$$\int_\Omega \frac{\nabla u \nabla v}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} dx = \int_\Omega f(x) v dx, \quad \forall v \in W_0^{1,1}(\Omega).$$

Pode-se provar que o funcional de Euler-Lagrange associado a (0.1) é $\Phi : W_0^{1,1}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi(u) = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2} dx - \int_\Omega f(x) u dx.$$

Além disso, segue que $\Phi \in C^1(W_0^{1,1}(\Omega))$ e

$$\Phi'(u)v = \int_\Omega \frac{\nabla u \nabla v}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} dx - \int_\Omega f(x) v dx, \quad \forall v \in W_0^{1,1}(\Omega).$$

Vamos pensar na situação geométrica mais simples possível para Φ, a saber, quando $|f|_\infty$ é pequeno o suficiente. Nesse caso, Φ é coercivo e limitado inferiormente. Logo, o natural seria procurar por pontos críticos de Φ através de resultados de minimização global. Seja

$$\alpha = \inf_{u \in W_0^{1,1}(\Omega)} \Phi(u)$$

e $(u_n) \subset W_0^{1,1}(\Omega)$ uma sequência minimizante para Φ. Pela coercividade de Φ, temos que (u_n) é limitada. Entretanto, como $W_0^{1,1}(\Omega)$ **não é reflexivo**, não podemos extrair de (u_n) uma subsequência que convirja na topologia fraca para um elemento de $W_0^{1,1}(\Omega)$. Supondo que Ω seja limitado e usando a compacidade da imersão $W_0^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, temos que existe $\overline{u} \in L^1(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência

$$u_n \to \overline{u} \quad \text{em } L^1(\Omega).$$

Naturalmente nosso candidato a mínimo global para Φ é $\overline{u}$. Porém, cabe a seguinte pergunta:

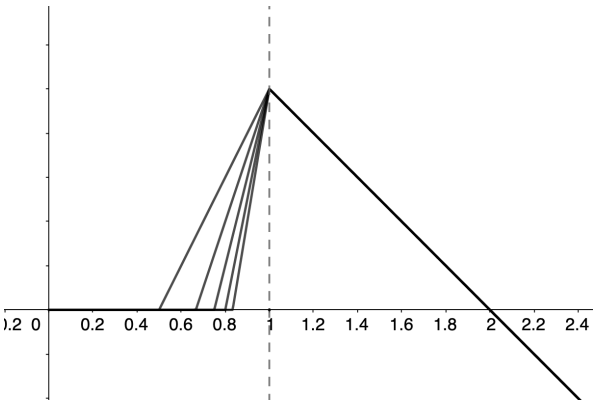
$$\overline{u} \in W_0^{1,1}(\Omega)?$$

Isso seria verdadeiro se o funcional $u \mapsto \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}dx$ fosse semicontínuo inferiormente em $W_0^{1,1}(\Omega)$, com respeito à topologia de $L^1(\Omega)$. Se esse fosse o caso, seguiria que $\overline{u} \in W_0^{1,1}(\Omega)$ e ainda que

$$\begin{aligned}
\alpha &\leq \Phi(\overline{u}) \\
&= \Phi_0(\overline{u}) - \int_\Omega f(x)\overline{u}dx \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty} \Phi_0(u_n) - \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f(x)u_n dx \\
&= \liminf_{n\to+\infty} \Phi(u_n) = \alpha.
\end{aligned}$$

Portanto, na hipótese de tal semicontinuidade inferior valer, $\overline{u}$ seria um minimizante global de Φ e, assim, um ponto crítico. Entretanto, $u \mapsto \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}dx$ **não é** semicontínuo em $W_0^{1,1}(\Omega)$, com respeito à topologia de $L^1(\Omega)$. De fato, considere por exemplo a sequência $(v_n) \subset W_0^{1,1}(\Omega)$, onde

$$v_n = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1-1/n, \\ n(x-1)+1, & 1-1/n \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$



Note que trata-se de uma sequência limitada em $W_0^{1,1}((0,2))$ e tal que $v_n \to v$ em $L^1(0,2)$, onde

$$v(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Entretanto $v \notin W_0^{1,1}(0,2)$. Esse fato deixa claro que é necessário tratar o problema (0.1) em um espaço maior do que $W_0^{1,1}(\Omega)$. Esse espaço é o chamado espaço das funções de variação limitada, $BV(\Omega)$, formado pelas funções de $L^1(\Omega)$, para as quais as suas derivadas distribucionais de primeira ordem são geradas por medidas de Radon, isto é

$$BV(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega);\, Du \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)\}.$$

O espaço $BV(\Omega)$ é um espaço de Banach o qual tem muitas propriedades em comum com os espaços de Sobolev usuais, como resultados de densidade de funções suaves (com respeito a uma topologia adequada), de imersão contínua e compacta em espaços de Lebesgue, existência de traço, etc. Devido a isso e também ao fato de ser esse o espaço adequado para tratar variacionalmente problemas envolvendo operadores muito importantes nas aplicações, como o operador de curvatura média e o operador $1-$Laplaciano, $\Delta_1 u := \operatorname{div}(\nabla u/|\nabla u|)$, esse vem sendo cada mais explorado.

No que diz respeito a problemas envolvendo o operador $1-$laplaciano, a primeira dificuldade que surge é relacionada à definição do que vem a ser uma solução. Consideremos o problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) = f(x) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{0.2}$$

Uma vez que as soluções de (0.2) são elementos de $BV(\Omega)$, Du e $|Du|$ são medidas de Radon vetorial e escalar, respectivamente. Assim, o quociente $Du/|Du|$ não está bem definido e, por isso, o conceito de solução fraca não se aplica a essa classe de problema. Como alternativa, grosso modo, pode-se argumentar de duas formas diferentes (em vários casos equivalentes) para se definir razoavelmente o que vem a ser uma solução de (0.2). Uma vez que o funcional energia associado a problemas desse tipo, se escreve como a diferença entre um que é localmente lipchitziano e um de classe C^1, pode-se utilizar a teoria de subdiferenciais de Clarke (ver [12, 14]), de modo que uma solução de (0.2) pode ser vista como uma função $u \in BV(\Omega)$, tal que

$$\|v\|_{BV} - \|u\|_{BV} \geq \int_\Omega f(x)(v-u)dx, \quad \forall v \in BV(\Omega).$$

Em geral, esse tipo de solução é encontrada através da aplicação de métodos variacionais, ao funcional energia associado ao problema. Esse tipo de abordagem foi explorada em vários trabalhos do autor, em parceria com alguns colaboradores, alguns dos quais serão expostos adiante nesse texto.

Embora interessante, a abordagem baseada puramente na aplicação dos resultados de Análise Não-Linear aos funcionais com a regularidade citada anteriormente, não nos permite encontrar uma equação de Euler-Lagrange efetivamente satisfeita pela solução encontrada. De fato, no final da década de 90 e início dos anos 2000, em uma série de trabalhos, F. Andreu, C. Ballester, V. Caselles e J. Mazón (ver [2, 3, 4] e também a monografia [5]) conseguiram determinar precisamente a expressão da equação de Euler-Lagrange associada a problemas envolvendo o operador 1-laplaciano. Segundo essa definição, por exemplo, dizemos que $u \in BV(\Omega)$ é solução de (0.2), se existe um campo vetorial $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que, $\|\mathbf{z}\|_\infty \leq 1$ e

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \mathbf{z} &= f(x) \text{ q.s. em } \Omega, \\ (\mathbf{z}, Du) &= |Du| \text{ em } \mathcal{M}(\Omega), \\ [\mathbf{z}, \nu] &\in sign(-u) \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Note que nas equações acima, existem algumas expressões que necessitam ser definidas precisamente, como por exemplo $(\mathbf{z}, Du)$ e $[\mathbf{z}, \nu]$. De fato isso foi feito nesses trabalhos utilizando-se da *pairing theory* elaborada por G. Anzellotti em [6]. Em recentes trabalhos

do autor, juntamente com alguns colaboradores, essa abordagem foi também explorada e, adiante nesse texto, alguns desses argumentos serão expostos.

Chapter 1

Espaço das funções de variação limitada

1.1 Definições e propriedades básicas

Nessa seção, Ω será um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ com fronteira lipschitziana.

Definição 1.1.1 *Dizemos que uma função $u \in L^1(\Omega)$ é uma função de variação limitada, se sua derivada distribucional Du for gerada por uma medida de Radon, isto é, se $Du \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Definimos assim o espaço das funções de variação limitada por*

$$BV(\Omega) = \left\{u \in L^1(\Omega);\, Du \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)\right\}.$$

Observação 1.1.2 *Como $\mathcal{M}(\Omega)$ é igual ao dual topológico de $C_0(\Omega, \mathbb{R})$ e como $C_c^1(\Omega, \mathbb{R})$ é denso em $C_0(\Omega, \mathbb{R})$ com respeito à norma $|\cdot|_\infty$, segue que os itens abaixo são todos equivalentes:*

- $u \in BV(\Omega)$;
- $u \in L^1(\Omega)$ *e* $\|Du\| := \sup\left\{\int_\Omega u\, div\,\varphi\, dx;\, \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N),\, |\varphi|_\infty \leq 1\right\} < +\infty$;
- $u \in L^1(\Omega)$ *e* $\|Du\| = \sup\left\{\sum_{i=1}^N \int_\Omega \varphi_i D_i u;\, \varphi \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^N),\, |\varphi|_\infty \leq 1\right\} < +\infty$.

Pelo Teorema de Representação de Riesz-Alexandroff, temos ainda que

$$\|Du\| = \int_\Omega |Du|.$$

Claramente o espaço $BV(\Omega)$ é um espaço vetorial, onde de fato podemos definir a seguinte norma:

$$\|u\| := \int_\Omega |Du| + |u|_1,$$

para $u \in BV(\Omega)$.

Antes de provarmos que esse espaço é completo com respeito à métrica induzida por essa norma, notemos que, pelo Teorema de Radon-Nikodym, dada $u \in BV(\Omega)$, existem duas medidas, Du^a e Du^s, a primeira absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$ e a segunda singular com respeito a essa mesma medida, tais que

$$Du = Du^a + Du^s.$$

Dessa observação segue que $W^{1,1}(\Omega)$ é um subespaço de $BV(\Omega)$ e que de fato a norma $\|\cdot\|$ é uma extensão da norma usual em $W^{1,1}(\Omega)$.

O exemplo abaixo nos mostra que $W^{1,1}(\Omega)$ é um subespaço próprio de $BV(\Omega)$.

Exemplo 1.1.3 *Seja $E \subset \Omega$ um aberto com fronteira suave e tal que $\mathcal{H}^{N-1}(\partial E) < +\infty$. Note que, para todo $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que $|\varphi|_\infty \leq 1$, pelo Teorema da Divergência temos*

$$\int_\Omega \chi_E \, div\, \varphi \, dx = \int_E div\, \varphi \, dx = \int_{\partial E} \varphi.\nu \, \mathcal{H}^{N-1} \leq \mathcal{H}^{N-1}(\partial E) < +\infty,$$

onde $\nu(x)$ denota o vetor normal em $x \in \partial E$, unitário e que aponta para fora de E. Assim, note que $\chi_E \in BV(\Omega)$, porém $\chi_E \notin W^{1,1}(\Omega)$. De fato $D\chi_E = -\nu \mathcal{H}^{N-1} \lfloor \partial E$, de forma que $D\chi_E$, por consistir em uma medida singular com respeito à de Lebesgue, não é gerada por uma função de $L^1(\Omega)$.

Verifiquemos agora a semicontinuidade inferior da norma em $BV(\Omega)$ com respeito à topologia de $L^1(\Omega)$.

Lema 1.1.4 *Seja $(u_n) \subset BV(\Omega)$ uma sequência limitada e tal que $u_n \to u$ in $L^1(\Omega)$. Então $u \in BV(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |Du| \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |Du_n|.$$

Demonstração: Seja $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que $|\varphi|_\infty \leq 1$ e note que

$$\int_\Omega u \operatorname{div} \varphi \, dx = \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega u_n \operatorname{div} \varphi \, dx \leq \liminf_{n \to \infty} \int_\Omega |Du_n|,$$

onde a primeira igualdade segue uma vez que $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$. Então o resultado segue tomando o supremo sobre todas as tais φ.

□

O resultado anterior nos possibilita provar que $(BV(\Omega), \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach.

Proposição 1.1.5 *$(BV(\Omega), \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Seja $(u_n) \subset BV(\Omega)$ uma sequência de Cauchy. Então para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_\Omega |Du_n - Du_m| + |u_n - u_m|_1 < \epsilon, \quad n, m \geq n_0. \tag{1.1}$$

Como (u_n) é também uma sequência de Cauchy em $L^1(\Omega)$, então existe $u \in L^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$, quando $n \to +\infty$. Então, para todo $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq n_0$, como $u_n - u_m \to u - u_m$ quando $n \to +\infty$ em $L^1(\Omega)$, segue do Lema 1.1.4 que

$$\int_\Omega |D(u - u_m)| \leq \liminf_{n \to \infty} \int_\Omega |D(u_n - u_m)| < \epsilon.$$

Mas isso implica que $u \in BV(\Omega)$ e ainda que $u_m \to u$ em $BV(\Omega)$, quando $m \to +\infty$.

□

Observe que, segundo a sua definição, o espaço $BV(\Omega)$ não contém $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ como um subconjunto denso com respeito à topologia da norma, haja vista que $\overline{C^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|} = W^{1,1}(\Omega)$. Assim, necessitamos introduzir uma noção de convergência que torne $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ denso em $BV(\Omega)$, com respeito à topologia induzida. Isso será feito considerando a chamada *convergência estrita*.

Definição 1.1.6 *Sejam $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset BV(\Omega)$ e $u \in BV(\Omega)$. Dizemos que $u_n \to u$ em $BV(\Omega)$ segundo a convergência estrita, se*

$$u_n \to u \quad \text{em } L^1(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega |Du_n| \to \int_\Omega |Du|,$$

quando $n \to +\infty$.

Proposição 1.1.7 *Para todo $u \in BV(\Omega)$, existe $(u_n) \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ tal que*

$$u_n \to u \quad in\ L^1(\Omega), \tag{1.2}$$

$$\int_\Omega |\nabla u_n| dx \to \int_\Omega |Du|. \tag{1.3}$$

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, seja $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ tal que

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_0} |Du| < \epsilon. \tag{1.4}$$

Seja ainda $\{\Omega_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma família de subconjuntos abertos de Ω, tais que $\Omega_i \subset\subset \Omega_{i+1}$ e ainda $\Omega = \bigcup_{i=0}^{+\infty} \Omega_i$. Agora utilizamos a família $\{\Omega_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ para construir uma cobertura aberta de Ω da seguinte forma. Seja $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ dada por, $C_1 = \Omega_2$ e, para $i \geq 2$, $C_i = \Omega_{i+1} \setminus \overline{\Omega_{i-1}}$. Seja $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, isto é, $\varphi_i \in C_c^\infty(C_i)$, $0 \leq \varphi_i \leq 1$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i = 1$. Note que isso implica que $\varphi_1 \equiv 1$ em Ω_1. Para cada $i \in \mathbb{N}$, escolhamos ρ_i funções regularizantes tais que

$$supp(\rho_i \star (\varphi_i u)) \subset C_i, , \tag{1.5}$$

$$\int_\Omega |\rho_i \star (u\varphi_i) - u\varphi_i| dx < \frac{\epsilon}{2^i}, \tag{1.6}$$

$$\int_\Omega |\rho_i \star (u\nabla\varphi_i) - u\nabla\varphi_i| dx < \frac{\epsilon}{2^i}, \tag{1.7}$$

$$\int_\Omega |\rho_1 \star (\varphi_1 Du)| dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_1 Du| < \epsilon. \tag{1.8}$$

Definamos então

$$u_\epsilon = \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i \star (u\varphi_i) \tag{1.9}$$

e observe que essa soma é localmente finita, uma vez que cada $x \in \Omega$ pertence a no máximo dois dentre os conjuntos $\{C_i\}$, e portanto está bem definida. Nota-se claramente ainda que $u_\epsilon \in C^\infty(\Omega)$.

Por (1.6), como $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i = 1$, note que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u - u_\epsilon| dx &\leq \sum_{i=1}^{+\infty} \int_\Omega |u\varphi_i - \rho_i \star (u\varphi_i)| dx \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

o que implica em (1.3).

Como $\sum_{i=1}^{+\infty} \nabla\varphi_i \equiv 0$ em Ω, segue que

$$\begin{aligned}\nabla u_\epsilon &= \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i \star (\varphi_i Du) + \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i \star (u\nabla\varphi_i) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i \star (\varphi_i Du) + \sum_{i=1}^{+\infty} (\rho_i \star (u\nabla\varphi_i) - u\nabla\varphi_i).\end{aligned}$$

Então (1.7) e (1.4) implicam que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega |\nabla u_\epsilon| dx - \int_\Omega |\rho_1 \star (\varphi_1 Du)| dx\right| &\leq \sum_{i=2}^{+\infty} \int_\Omega |\rho_i \star (\varphi_i Du)| dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^{+\infty} \int_\Omega |\rho_i \star (u\nabla\varphi_i) - u\nabla\varphi_i| dx \\ &\leq \sum_{i=2}^{+\infty} \int_\Omega |\varphi_i Du| dx + \epsilon \\ &\leq \int_{\Omega\setminus\Omega_0} |Du| + \epsilon \\ &< 2\epsilon.\end{aligned}$$

Assim (1.8) e a última desigualdade implicam que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega |\nabla u_\epsilon| dx - \int_\Omega |Du|\right| &\leq \left|\int_\Omega |\nabla u_\epsilon| dx - \int_\Omega |\rho_1 \star (\varphi_1 Du)| dx\right| \\ &\quad + \left|\int_\Omega |\rho_1 \star (\varphi_1 Du)| dx - \int_\Omega |Du|\right| \\ &< 2\epsilon + \left|\int_\Omega |\rho_1 \star (\varphi_1 Du)| dx - \int_\Omega |\varphi_1 Du|\right| \\ &\quad + \left|\int_\Omega |\varphi_1 Du| - \int_\Omega |Du|\right| \\ &< 3\epsilon + \int_\Omega |\varphi_1 - 1||Du| \\ &\leq 3\epsilon + \int_{\Omega\setminus\Omega_0} |Du| \\ &< 4\epsilon.\end{aligned}$$

Isso implica que $u_\epsilon \in C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ e ainda em (1.4), o que termina a prova. □

Observação 1.1.8 • *Modificando ligeiramente a demonstração, tomando funções regularizantes suficientemente próximos de u na norma de $L^p(\Omega)$, poderíamos ainda*

obter uma sequência $(u_n) \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$*, para a qual valesse (1.4) e (1.3) com* $L^p(\Omega)$ *em lugar de* $L^1(\Omega)$*, para todo* $p \geq 1$ *tal que* $u \in L^p(\Omega)$*.*

- *Em [25][Theorem 3.1], é mostrado que, se* $u \in BV(\Omega) \cap L^r(B)$*, para* $r \in [1, \infty)$*, então existe uma sequência* $(u_n)_n \subset C_0^\infty(\Omega)$*, tal que,*

$$u_n \to u \quad em\ L^s(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega |\nabla u_n| dx \to \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1},$$

quando $n \to +\infty$*, para todo* $s \in [1, r]$*. Além disso, em [25][Lemma 4.1], é provado também que, se* $p_n \to 1^+$ *quando* $n \to +\infty$*, então*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_B |\nabla u_n|^{p_n} dx = \int_B |Du| + \int_{\partial B} |u| d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Agora vamos utilizar os resultados anteriores para provar resultados de imersão do espaço $BV(\Omega)$ em espaços do tipo $L^p(\Omega)$.

Teorema 1.1.9 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto com fronteira suave (não necessariamente limitado). Então as seguintes imersões são contínuas*

$$BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad para\ p \in [1, 1^*],$$

onde $1^* = \dfrac{N}{N-1}$.

Demonstração: Dada $u \in BV(\Omega)$, seja $(u_n) \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ uma sequência de funções que convergem para u segundo a convergência estrita (a qual existe pela Proposição 4.1.3). Observe então que $u_n \in W^{1,1}(\Omega)$ para todo n e assim, dado $p \in [1, 1^*]$, pela imersão contínua de $W^{1,1}(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$, segue que

$$|u_n|_p \leq C \left(|u_n|_1 + \int_\Omega |\nabla u_n| dx \right) < +\infty.$$

Como $L^p(\Omega)$ é reflexivo e (u_n) é limitada em $L^p(\Omega)$, segue que $u_n \rightharpoonup u$ em $L^p(\Omega)$. Pela semicontinuidade inferior de $L^p(\Omega)$ com respeito à sua topologia fraca, segue que

$$|u|_p \leq \liminf_{n\to\infty} |u_n|_p \leq \liminf_{n\to\infty} C \left(|u_n|_1 + \int_\Omega |\nabla u_n| dx \right) = C\|u\|.$$

□

Segue ainda um resultado de imersões compactas de $BV(\Omega)$.

Teorema 1.1.10 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, limitado e com fronteira suave. Então as imersões abaixo são compactas*

$$BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad \text{para } p \in [1, 1^*),$$

Demonstração: Seja $(u_n) \subset BV(\Omega)$ tal que $\|u_n\| \leq 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, pela Observação 1.1.8, existe $v_n \in C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ tal que

$$|v_n - u_n|_p < \frac{1}{n}$$

e

$$\int_\Omega |\nabla v_n| dx < 2.$$

Note que como (v_n) é limitada em $W^{1,1}(\Omega)$, então pela compacidade da imersão desse espaço em $L^p(\Omega)$, para $p \in [1, 1^*)$, segue que existe uma subsequência (v_{n_k}) e $u \in L^p(\Omega)$, tal que

$$v_{n_k} \to u \quad \text{em } L^p(\Omega), \text{ quando } k \to \infty.$$

Mas isso implica que também

$$u_{n_k} \to u \quad \text{em } L^p(\Omega), \text{ quando } k \to \infty.$$

□

Outra semelhança do espaço $BV(\Omega)$ com relação aos espaços de Sobolev é o fato de que, tal como nos últimos, funções em $BV(\Omega)$ deixam traço em $\partial\Omega$, desde que o domínio seja suave o suficiente. No próximo resultado enunciamos com precisão esse fato, bem como a validade de uma versão generalizada da fórmula de Green.

Teorema 1.1.11 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto com fronteira lipschitziana. Então existe um operador linear e contínuo $\gamma : BV(\Omega) \to L^1(\partial\Omega)$ tal que:*

i) $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$, *para toda* $u \in C(\overline{\Omega}) \cap BV(\Omega)$;

ii) vale a seguinte versão generalizada da fórmula de Green:

$$\int_\Omega \varphi Du = -\int_\Omega u \, div\, \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma(u)\varphi.\nu d\mathcal{H}^{N-1}, \quad \forall \varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N), \tag{1.10}$$

onde $\nu(x)$ está definido para todo $x \in \partial\Omega$, a menos de um conjunto de medida $\mathcal{H}^{N-1}$ nula, e consiste no vetor normal exterior a Ω em x.

Exemplo 1.1.12 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio com fronteira suave. Dada $u \in BV(\Omega)$, defina $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por*

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases}$$

Então $v \in BV(\mathbb{R}^N)$ e ainda

$$Dv = Du\lfloor\Omega - tr(u)_{\partial\Omega}\nu\mathcal{H}^{N-1}\lfloor\partial\Omega,$$

onde $\nu(x)$ denota o vetor unitário exterior a Ω, em $x \in \partial\Omega$.

De fato, para toda $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, por (1.10), temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi Dv &= -\int_{\mathbb{R}^N} v\, div\varphi\, dx \\ &= -\int_{\Omega} u\, div\varphi\, dx \\ &= \int_{\Omega} \varphi Du - \int_{\partial\Omega} tr_{\partial\Omega}(u)\, \nu\, \varphi\, \mathcal{H}^{N-1}. \end{aligned}$$

Disso decorre que

$$Dv = Du\lfloor\Omega - tr_{\partial\Omega}(u)\, \nu\, \mathcal{H}^{N-1}\lfloor\partial\Omega,$$

no sentido das distribuições.

Agora vamos enunciar uma importante desigualdade que é amplamente utilizada quando se trata de espaços de Sobolev e que também é muito importantes quando se trabalha em $BV(\Omega)$.

Teorema 1.1.13 (Desigualdade de Poincaré em $BV(\Omega)$) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto com fronteira lipschitziana. Então existe uma constante $C = C(N, \Omega) > 0$ tal que*

$$\int_{\Omega} |u| dx \leq C \left(\int_{\Omega} |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} \right).$$

A demonstração do resultado acima encontra-se em [28][Proposition 2] e não será detalhada por exigir o uso de ferramentas que não serão desenvolvidas nessas notas.

Part I

Métodos variacionais no espaço das funções de variação limitada

Chapter 2

Aplicação 1: Operador $1-$Laplaciano em domínio limitado

Nesse capítulo vamos apresentar a primeira e talvez mais simples aplicacação da teoria apresentada no capítulo anterior à solução de problemas elípticos quasilineares. Mais especificamente vamos abordar o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_1 u &= f(u) \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

onde o operador Δ_1 é formalmente dado por $\Delta_1 u = \operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto, limitado e com fronteira suave, $N \geq 2$ e a não-linearidade f satisfaz o seguinte conjunto de hipóteses:

(f_1) $f \in C^0(\mathbb{R})$;

(f_2) $f(s) = o(1)$, quando $s \to 0$;

(f_3) existem $c_1, c_2 > 0$ tais que $|f(s)| \leq c_1 + c_2|s|^{p-1}$ para todo $s \in \mathbb{R}$, onde $p \in [1, 1^*)$;

(f_4) Existe $\theta > 1$ tal que

$$0 < \theta F(s) \leq f(s)s, \quad \text{for } s \neq 0,$$

onde $F(s) = \int_0^s f(t)dt$.

Nosso objetivo é o de demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 2.0.1 *Suponha válidas as hipóteses* $(f_1)-(f_4)$. *Então (0.1) possui uma solução não-trivial.*

Antes de começarmos a abordagem variacional que nos levará a provar o Teorema 2.0.1, é necessário estudarmos com mais cuidado o operador Δ_1, o qual pela sua definição formal não está bem definido em pontos onde $\nabla u = 0$. De fato, como veremos, o funcional energia associado a (0.1) está bem definido em $BV(\Omega)$ e, seus pontos críticos, satisfazem uma versão de (0.1) na qual aparece um campo vetorial que está bem definido e que coincide com $\nabla u/|\nabla u|$ nos pontos onde $\nabla u \neq 0$.

Na primeira seção desse capítulo nós estudaremos o funcional energia associado a (0.1), enquanto na segunda apresentaremos a versão precisa desse problema. Por fim, na terceira, enunciamos e demonstramos uma versão do Teorema do Passo da Montanha adequado ao funcional energia aqui considerado e posteriormente demonstramos o Teorema 2.0.1.

2.1 O funcional energia

Para abordar (0.1) vamos trabalhar no espaço $BV(\Omega)$, porém munido com a seguinte norma

$$\|u\| := \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1},$$

a qual, pelo Teorema 1.1.13 é equivalente à norma usual de $BV(\Omega)$.

Definamos os seguintes funcionais, $\Phi_0, \Phi_F, \Phi : BV(\Omega) \to \mathbb{R}$ onde para $u \in BV(\Omega)$, temos

$$\Phi_0(u) := \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1},$$

$$\Phi_F(u) := \int_\Omega F(u)dx$$

e

$$\Phi(u) := \Phi_0(u) - \Phi_F(u).$$

Analisando o funcional Φ é fácil ver que o mesmo não é diferenciável. De fato o funcional Φ_0 não é suave, embora seja lipschitziano e convexo. Uma vez que $\Phi_F \in C^1(BV(\Omega))$, fica claro que devemos nos basear em outra teoria, que não a usual, para

definirmos o que se entende por um ponto crítico de Φ. Isto será feito através da teoria de subdiferenciais (ver [14, 12]), a qual desenvolve resultados de análise não-linear para funcionais localmente lipschitzianos. Assim, o que vamos entender por um ponto crítico de Φ é uma função $u \in BV(\Omega)$ tal que $0 \in \partial\Phi(u)$, o que corresponde, uma vez que Φ_0 é convexo, a $\Phi_F'(u) \in \partial\Phi_0(u)$, o que, por sua vez, é equivalente a

$$\Phi_0(v) - \Phi_0(u) \geq \Phi_F'(u)(v-u), \quad \forall v \in BV(\Omega). \tag{1.2}$$

Vamos agora estudar um resultado de [7], no qual são analisadas as principais propriedades de diferenciabilidade do funcional Φ_0. Como veremos, embora não diferenciável, esse funcional admite derivadas direcionais com respeito a algumas direções. Antes disso, lembremos que para $\mu \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, denotamos por $\mu = \mu^a + \mu^s$ a decomposição dada pelo Teorema de Radon Nikodyn, onde μ^a e μ^s são, respectivamente, a parte absolutamente contínua e singular, com respeito à medida de Lebesgue $N-$dimensional $\mathcal{L}^N$. Denotamos ainda $|\mu|$, o valor absoluto de μ, dada pela medida de Radon escalar definida em [8][pg. 125]. Por $\frac{\mu}{|\mu|}(x)$ denotamos a derivada de Lebesgue de μ com respeito à $|\mu|$, dada por

$$\frac{\mu}{|\mu|}(x) = \lim_{r\to 0} \frac{\mu(B_r(x))}{|\mu|(B_r(x))}.$$

Para $g : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, definamos

$$g^0(x,p) = \lim_{t\to 0^+} g\left(x, \frac{p}{t}\right) t.$$

Suponha que g seja diferenciável em p para todo $x \in \Omega$, $p \in \mathbb{R}^N$ e $g^0(x,p)$ seja diferenciável para todo $x \in \Omega$, $p \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ e ainda que exista $M > 0$ tal que

$$|g_p(x,p)| \leq M, \quad |g_p^0(x,p)| \leq M.$$

Então $\Phi_g : BV(\Omega) \to \mathbb{R}$, definida por

$$\Phi_g(u) = \int_\Omega g(x, Du) := \int_\Omega g(x, (Du)^a(x))dx + \int_\Omega g^0\left(x, \frac{Du}{|Du|}(x)\right)|Du|^s$$

é diferenciável no ponto $u \in BV(\Omega)$ na direção $v \in BV(\Omega)$ se e somente se $|Dv|^s$ é absolutamente contínua com respeito a $|Du|^s$ e (Dv^a) se anula quase sempre em $\{x \in \mathbb{R}^N;\, (Du)^a(x) = 0\}$. Nesse caso, temos que

$$\Phi_g'(u)v = \int_\Omega g_p(x, (Du)^a(x))(Dv)^a(x)dx + \int_\Omega g_p^0\left(x, \frac{Du}{|Du|}(x)\right)\frac{Dv}{|Dv|}(x)|Dv|^s. \tag{1.3}$$

Como

$$\Phi_0(u) = \Phi_g(u) + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1}$$

onde $g(x,p) = |p|$ e $g^0(x,p) = |p|$, temos que, dado $u \in BV(\Omega)$, $\Phi_0'(u)v$ está bem definido para todo $v \in BV(\Omega)$ tal que $|Dv|^s$ é absolutamente contínua com respeito a $|Du|^s$, (Dv^a) se anula quase sempre em $\{x \in \mathbb{R}^N;\ (Du)^a(x) = 0\}$ e $v(x) = 0$, $\mathcal{H}^{N-1}-$ q.t.p., no conjunto $\{x \in \partial\Omega;\ u(x) = 0\}$. Temos ainda que

$$\Phi_0'(u)v = \int_\Omega \frac{(Du)^a(Dv)^a}{|(Du)^a|^2} dx + \int_\Omega \frac{Du}{|Du|}(x)\frac{Dv}{|Dv|}(x)|(Dv)|^s + \int_{\partial\Omega} \mathrm{sgn}(u) v d\mathcal{H}^{N-1}. \quad (1.4)$$

Por fim vamos precisar de mais uma propriedade de $BV(\Omega)$, a qual afirma que se $u, v \in BV(\Omega)$, então $\max\{u,v\}, \min\{u,v\} \in BV(\Omega)$ e ainda

$$\Phi_0(\max\{u,v\}) + \Phi_0(\min\{u,v\}) \leq \Phi_0(u) + \Phi_0(v), \quad \forall u, v \in BV(\Omega). \quad (1.5)$$

2.2 A equação de Euler-Lagrange

Nessa seção vamos estudar a versão precisa da equação de Euler-Lagrange associada aos pontos críticos de Φ. Mais especificamente vamos provar que se $u \in BV(\Omega)$ for tal que $0 \in \partial\Phi(u)$, então existe um campo vetorial $z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, o qual faz o papel de $\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}$ em (0.1) e está bem definido mesmo onde $\nabla u = 0$. Nesse sentido, o primeiro passo é estender os funcional Φ a $L^{1^*}(\Omega)$ e então usar algumas ferramentas de análise convexa.

Consideremos as extensões dos funcionais Φ_0, Φ_F e Φ, dadas respectivamente por $\overline{\Phi_0}, \overline{\Phi_F}, \overline{\Phi} : L^{1^*}(\Omega) \to \mathbb{R}$, onde

$$\overline{\Phi_0}(u) = \begin{cases} \Phi_0(u) & \text{se } u \in BV(\Omega), \\ +\infty & \text{se } u \in L^{1^*}(\Omega) \backslash BV(\Omega), \end{cases}$$

$$\overline{\Phi_F}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u) dx$$

e $\overline{\Phi} = \overline{\Phi_0} - \overline{\Phi_F}$. É fácil ver que $\overline{\Phi_F}$ é um funcional $C^1(L^{1^*}(\Omega))$ e que ainda $\overline{\Phi_0}$ é convexo e semicontínuo inferiormente em $L^{1^*}(\mathbb{R}^N)$. Assim o subdiferencial (como definido por A. Szulkin em [34]) de $\overline{\Phi_0}$, denotado por $\partial\overline{\Phi_0}$, está bem definido. O próximo resultado é crucial para obter a equação de Euler-Lagrange satisfeita pelos pontos críticos de Φ.

Lema 2.2.1 *Se $u \in BV(\Omega)$ for tal que $0 \in \partial\Phi(u)$, então $0 \in \partial\overline{\Phi}(u)$.*

Demonstração: Suponha que $u \in BV(\Omega)$ seja tal que $0 \in \partial\Phi(u)$. Então u satisfaz (1.2). Para $v \in L^{1^*}(\Omega)$, note que:

- se $u \in BV(\Omega) \cap L^{1^*}(\Omega)$, então

$$\begin{aligned}\overline{\Phi_0}(v) - \overline{\Phi_0}(u) &= \Phi_0(v) - \Phi_0(u) \\ &\geq \Phi_F'(u)(v-u) \\ &= \int_\Omega f(u)(v-u)\,dx \\ &= \overline{\Phi_F}'(u)(v-u);\end{aligned}$$

- se $u \in L^{1^*}(\Omega)\backslash BV(\Omega)$, como $\overline{\Phi_0}(v) = +\infty$ e $\overline{\Phi_0}(u) < +\infty$, temos que

$$\begin{aligned}\overline{\Phi_0}(v) - \overline{\Phi_0}(u) &= +\infty \\ &\geq \overline{\Phi_F}'(u)(v-u).\end{aligned}$$

Assim, nos dois casos $0 \in \partial\overline{\Phi}(u)$.

□

Se $u \in BV(\Omega)$ for uma solução de variação limitada de (0.1), pelo último resultado temos que $0 \in \partial\overline{\Phi}(u)$. Como $\overline{\Phi_0}$ é convexo e $\overline{\Phi_F}$ suave, temos que $\overline{\Phi_F}'(u) \in \partial\overline{\Phi_0}(u)$. Assim, por [23][Proposition 4.23], existe $z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que $|z|_\infty^\downarrow \leq 1$,

$$-\operatorname{div} z = \overline{\Phi_F}'(u) \quad \text{em } L^N(\Omega) \tag{2.6}$$

no sentido das distribuições e

$$\overline{\Phi_0}(u) = -\int_\Omega u \operatorname{div} z\,dx. \tag{2.7}$$

Portanto segue de (2.6) e (2.7) que u satisfaz

$$\begin{cases} \exists\, z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N),\ |z|_\infty \leq 1,\ \operatorname{div} z \in L^N(\Omega), \\ -\displaystyle\int_\Omega u \operatorname{div} z\,dx = \int_\Omega |Du|, \\ -\operatorname{div} z\ = f(x,u), \quad \text{quase sempre em } \Omega. \end{cases} \tag{2.8}$$

Logo (2.8) é a versão precisa de (0.1).

2.3 Demonstração do Teorema 2.0.1

Devido ao fato de o operador $1-$Laplaciano ter o mesmo grau de homogeneidade tanto no zero quanto no infinito, podemos sem dificuldade provar que o funcional Φ satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha. Porém, o fato de o espaço $BV(\Omega)$ não ser reflexivo torna inviável provar que Φ satisfaz a condição de Palais-Smale. Assim, faz-se necessário enunciarmos e provarmos uma versão do Teorema do Passo da Montanha para funcionais localmente lipschitzianos, em espaços de Banach não necessariamente reflexivos, o qual não exija a condição de Palais-Smale. Por isso, a seguir enunciamos e provamos tal teorema.

Teorema 2.3.1 *Seja E um espaço de Banach, $\Phi = I_0 - I$ onde $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ e I_0 um funcional localmente lipschitziano e convexo definido em E. Suponha que Φ satisfaça:*

i) Existem $\rho > 0$, $\alpha > \Phi(0)$ tais que $\Phi|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$,

ii) $\Phi(e) < \Phi(0)$ para algum $e \in E \backslash \overline{B_\rho(0)}$,

Então para todo $\epsilon > 0$ existe $x_\epsilon \in E$ tal que

$$c - \epsilon < \Phi(x_\epsilon) < c + \epsilon, \tag{3.9}$$

onde $c \geq \alpha$ é caracterizado por

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t)), \tag{3.10}$$

$\Gamma = \{\gamma \in C^0([0,1], E);\ \gamma(0) = 0\ e\ \gamma(0) = e\}$ *e*

$$I_0(y) - I_0(x_\epsilon) \geq I'(x_\epsilon)(y - x_\epsilon) - \epsilon\|y - x_\epsilon\|, \quad \forall y \in E. \tag{3.11}$$

Antes de iniciar a demonstração do Teorema 2.3.1, vamos provar que a condição (3.11) é equivalente à existência de um $z_\epsilon \in E^*$ tal que $\|z_\epsilon\|_* \leq \epsilon$ e

$$I_0(y) - I_0(x_\epsilon) \geq I'(x_\epsilon)(y - x_\epsilon) + \langle z_\epsilon, y - x_\epsilon\rangle_{E^*,E}, \quad \forall y \in E, \tag{3.12}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E^*,E}$ denota o par dualidade entre E e o seu dual.

De fato, claramente (3.12) implica em (3.11). Para provar que (3.11) também implica em (3.12), vamos enunciar um lema provado por Szulkin em [34][Lemma 1.3].

Lema 2.3.2 *Seja E um espaço de Banach e $\chi : E \to (-\infty, +\infty]$ uma função convexa e semicontínua inferiormente tal que $\chi(0) = 0$. Se*

$$\chi(x) \geq -\|x\|, \quad \forall x \in E,$$

então existe $z \in E^*$, $\|z\|_* \leq 1$, tal que

$$\chi(x) \geq \langle z, x\rangle_{E^*,E}, \quad \forall x \in E.$$

Agora, se (3.11) vale, então

$$\frac{1}{\epsilon}\left(I_0((y - x_\epsilon) + x_\epsilon) - I_0(x_\epsilon) - I'(x_\epsilon)(y - x_\epsilon)\right) \geq -\|y - x_\epsilon\|,$$

para todo $y \in E$. Aplicando o Lema 2.3.2 a

$$\chi(x) = \frac{1}{\epsilon}\left(I_0((x + x_\epsilon) - I_0(x_\epsilon) - I'(x_\epsilon)x\right)$$

segue a existência de um $z \in E^*$, tal que $\|z\|_* \leq 1$ e

$$\chi(x) \geq \langle z, x\rangle_* \quad \forall x \in E.$$

Tomando $z_\epsilon = \epsilon z$ e $x = y - x_\epsilon$ onde $y \in E$, segue (3.12) para z_ϵ and $\|z_\epsilon\|_* \leq \epsilon$.

Para prosseguir com a demonstração, precisamos de uma versão do Lema da Deformação para funcionais localmente lipschitzianos que não necessariamente satisfazem a condição de Palais-Smale, provado em [18][Theorem 4].

Teorema 2.3.3 (Lema da Deformação) *Seja E um espaço de Banach e $T : E \to \mathbb{R}$ um funcional localmente lipschtiziano. Dado $a \in \mathbb{R}$, denotemos $T_a = \{x \in E;\, T(x) \leq a\}$. Se existir $d \in \mathbb{R}$, $S \subset E$ e $\alpha, \delta, \epsilon_0 > 0$ tais que*

$$\beta(x) := \min\{\|z\|_{E^*};\, z \in \partial T(x)\} \geq \alpha, \quad \forall x \in T^{-1}([d - \epsilon_0, d + \epsilon_0]) \cap S_{2\delta},$$

onde $S_{2\delta}$ é uma $2\delta-$vizinhança de S, então para $0 < \epsilon < \min\left\{\frac{\delta\alpha}{2}, \epsilon_0\right\}$, existe um homeomorfismo $\eta : E \to E$ tal que

i) $\eta(x) = x$ para todo $x \notin T^{-1}([d - \epsilon_0, d + \epsilon_0]) \cap S_{2\delta}$;

ii) $\eta(T_{d+\epsilon} \cap S) \subset T_{d-\epsilon}$;

iii) $T(\eta(x)) \leq T(x)$, para todo $x \in E$.

Demonstração: [Demonstração do Teorema 2.3.3]

Para começar, sob as hipóteses do teorema em questão, vamos recordar o Lemma 3.3 de [12], o qual enuncia a existência de um campo *psudo-gradiente* para T, dado por um campo vetorial localmente lipschitziano $g : T^{-1}([d-\epsilon_0, d+\epsilon_0]) \cap S_{2\delta} \to E$ satisfazendo

$$\|g(x)\| < 1 \tag{3.13}$$

e

$$\langle z^*, g(x)\rangle_{E^*,E} > \frac{\alpha}{2}, \quad \forall z^* \in \partial T(x). \tag{3.14}$$

Para

$$0 < \epsilon < \min\left\{\frac{\delta\alpha}{2}, \epsilon_0\right\}, \tag{3.15}$$

definamos

$$A = T^{-1}([d-\epsilon_0, d+\epsilon_0]) \cap S_{2\delta},$$

$$B = T^{-1}([d-\epsilon, d+\epsilon]) \cap S_{\delta}$$

e note que $B \subset A$. Seja

$$\psi(x) = \frac{d(x, E\backslash A)}{d(x, E\backslash A) + d(x, B)}$$

e note que ψ é uma função contínua e localmente lipschtziana tal que $0 \leq \psi \leq 1$ e

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in B, \\ 0 & \text{if } x \in E\backslash A. \end{cases}$$

Agora considere $V(x) = \psi(x)g(x)$ a qual é contínua e localmente lipschtziana e ainda $\sigma(t,x)$ solução do seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\sigma(t,x) &= -V(\sigma(t,x)), \quad t > 0, \\ \sigma(0,x) &= x, \end{cases}$$

a qual é contínua em $\mathbb{R}_+ \times E$.

Vamos escolher

$$t_0 \in \left(\frac{2\epsilon}{\alpha}, \delta\right) \tag{3.16}$$

e definir

$$\eta(x) = \sigma(t_0, x), \quad x \in E.$$

Note que como $V \equiv 0$ em $E\backslash(T^{-1}([d-\epsilon_0, d+\epsilon_0]) \cap S_{2\delta}$, segue que $i)$ se verifica.

Para provar $ii)$, relembremos a Proposition 9 em [12], a qual implica que $t \mapsto T(\sigma(t,x))$ é diferenciável a menos de um conjunto de medida nula, para cada $x \in E$. Além disso, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T(\sigma(t,x)) &\leq \max\left\{\left\langle z^*, \tfrac{d}{dt}\sigma(t,x)\right\rangle_{E^*,E}\,;\, z^* \in \partial T(\sigma(x,t))\right\} \\ &= -\min\{\langle z^*, V(\sigma(t,x))\rangle\,;\, z^* \in \partial T(\sigma(x,t))\} \\ &\leq \begin{cases} -\dfrac{\alpha}{2} & \text{if } \sigma(t,x) \subset T^{-1}([d-\epsilon, d+\epsilon]) \cap S_\delta \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \end{aligned} \tag{3.17}$$

onde nós usamos (3.14) na última estimativa. Então a função $t \mapsto T(\sigma(t,x))$ é não-crescente, para todo $x \in E$ e assim nós provamos $iii)$.

Note ainda que, para todo $t > 0$

$$\begin{aligned} \|\sigma(t,x) - x\| &= \|\sigma(t,x) - \sigma(0,x) \\ &= \left\|\int_0^t \frac{d}{ds}\sigma(s,x)ds\right\| \\ &\leq \int_0^t \|V(\sigma(s,x))\|ds \\ &\leq t. \end{aligned}$$

Consideremos $x \in T_{d+\epsilon} \cap S$. Se existisse algum $t \in [0, t_0]$ tal que $T(\sigma(t,x)) < d - \epsilon$, então $T(\sigma(t_0,x)) < d - \epsilon$ e $ii)$ seria satisfeito por η. Então suponha que

$$\sigma(t,x) \in T^{-1}([d-\epsilon, d+\epsilon]), \forall t \in [0, t_0]$$

e vamos provar que $\sigma(t,x) \subset S_\delta$, $\forall t \in [0, t_0]$. De fato, note que

$$\|\sigma(t,x) - x\| \leq t \leq t_0 < \delta, \quad \forall t \in [0, t_0].$$

Assim, como $\sigma([0,t_0],x) \subset T^{-1}([d-\epsilon, d+\epsilon]) \cap S_\delta$, segue por (3.16) e (3.17) que

$$\begin{aligned} T(\eta(x)) &= T(\sigma(t_0,x)) \\ &= T(x) + \int_0^{t_0} \frac{d}{dt}T(\sigma(s,x))dx \\ &\leq T(x) - \frac{\alpha}{2}t_0 \\ &< d - \epsilon \end{aligned}$$

e então $ii)$ se verifica.

□

Agora, finalmente, vamos provar o Teorema 2.3.1.

Demonstração: [Demonstração do Teorema 2.3.1]
Primeiramente note que, como $\Phi(e) < \Phi(0) < \alpha \leq \Phi\,\big|_{\partial B_\rho}$, então

$$c \geq \alpha.$$

Suponha por contradição que exista $\epsilon > 0$, o qual podemos supor que satisfaça

$$c - \epsilon > \Phi(0),$$

tal que para todo $x \in \Phi^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon])$, onde c é definido em (3.10), (3.11) não valha. Como (3.11) e (3.12) são equivalentes, então para todo $z \in E^*$ tal que $\|z\|_* \leq \epsilon$, existe $y_\epsilon \in X$, tal que

$$I_0(y_\epsilon) - I_0(x_\epsilon) < I'(x_\epsilon)(y_\epsilon - x_\epsilon)dx + \langle z_\epsilon, y_\epsilon - x_\epsilon\rangle_*.$$

Assim, segue que

$$\beta(x) \geq \epsilon, \quad \forall x \in \Phi^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon]),$$

onde $\beta(x) = \inf\{\|w^*\|_*;\ w^* \in \partial I_0(u) - I'(x)\}$.

Pelo Teorema 2.3.3 aplicado a $T = \Phi$, $d = c$, $\alpha = \epsilon$ e $\epsilon_0 = \epsilon$ segue que existe um homeomorfismo $\eta : E \to E$ e $\bar{\epsilon} \in (0, \epsilon)$ tais que

$i)$ $\eta(x) = x$ para todo $x \notin \Phi^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon])$;

$ii)$ $\eta(\Phi_{c+\bar{\epsilon}}) \subset \Phi_{c-\bar{\epsilon}}$.

Pela definição de c, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} \Phi(\gamma(t)) \leq c + \bar{\epsilon}.$$

Vamos considerar $\tilde{\gamma}(t) = \eta(\gamma(t))$ e note que, como $\Phi(0), \Phi(e) < c - \epsilon$, $i)$ implica que $\tilde{\gamma} \in \Gamma$. Então, $ii)$ implica que

$$c \leq \max_{t\in[0,1]} \Phi(\tilde{\gamma}(t)) \leq c - \bar{\epsilon},$$

o que é uma contradição e assim o resultado segue.

□

Munidos desse importante resultado minimax, mostremos que o funcional Φ satisfaz as hipóteses da versão do Teorema do Passo da Montanha aqui demonstrado.

Primeiramente mostremos que o funcional Φ satisfaz a condição i). Antes, note que por (f_2) e (f_3), segue que para todo $\eta > 0$, existe $A_\eta > 0$ tal que

$$|F(s)| \leq \eta|s| + A_\eta|s|^p, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.18}$$

Por (3.18) e pelo Teorema 1.1.9, segue que

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} - \int_\Omega F(u)dx \\
&\geq \|u\| - \eta|u|_1 - A_\eta|u|_p^p \\
&\geq \|u\| - C\eta\|u\| - CA_\eta\|u\|^p \\
&= (1 - C\eta)\|u\| - C_1\|u\|^p \\
&\geq \alpha,
\end{aligned}$$

para toda $u \in BV(\Omega)$, tal que $\|u\| = \rho$, onde $0 < \eta < 1/C$ é fixado e $0 < \rho < \left(\frac{1 - C\eta}{C_1}\right)^{\frac{1}{p-1}}$ e $\alpha = \rho(1 - C\eta - C_1\rho^{p-1})$.

Agora vamos provar que Φ satisfaz a condição ii) do Teorema 2.3.1. Note primeiramente que a condição (f_4) implica que existem constantes $d_1, d_2 > 0$ tais que

$$F(s) \geq d_1|s|^\theta - d_2, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.19}$$

Se $u \in BV(\Omega)\backslash\{0\}$, dado $t > 0$, temos

$$\Phi(tu) \leq t\|u\| - d_1 t^\theta \int_\Omega |u|^\theta dx + d_2|\Omega| \to -\infty,$$

quando $t \to +\infty$, já que $\theta > 1$.

Então o Teorema 2.3.1 nos garante a existência de sequências $(u_n) \subset BV(\Omega)$ e $\epsilon_n \to 0$ tais que

$$\Phi_n(u_n) \to c, \quad \text{quando } n \to +\infty$$

e

$$\Phi_0(v) - \Phi_0(u_n) \geq \int_\Omega f(u_n)(v - u_n)dx - \epsilon_n\|v - u_n\|, \quad \forall v \in BV(\Omega). \tag{3.20}$$

Mostremos agora que a sequência (u_n) é limitada em $BV(\Omega)$. Em (3.20), escolhendo-se a função teste $v = 2u_n$, obtemos

$$\|u_n\| \geq \int_\Omega f(u_n)u_n dx - \epsilon_n \|u_n\|,$$

o que implica que

$$(1+\epsilon_n)\|u_n\| \geq \int_\Omega f(u_n)u_n dx. \tag{3.21}$$

Então, por (f_4) e (3.21),

$$\begin{aligned} c + o_n(1) &\geq \Phi(u_n) \\ &= \|u_n\| + \int_\Omega \left(\frac{1}{\theta} f(u_n)u_n - F(u_n)\right) dx - \int_\Omega \frac{1}{\theta} f(u_n)u_n dx \\ &\geq \|u_n\| \left(1 - \frac{1}{\theta} + \frac{\epsilon_n}{\theta}\right) \\ &\geq C\|u_n\|, \end{aligned}$$

para uma constante $C > 0$ uniforme em $n \in \mathbb{N}$. Logo (u_n) é limitada.

Pela limitação de (u_n) em $BV(\Omega)$ e pela compacidade das imersões do Teorema 1.1.10, segue que existe $u \in L^r(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $L^r(\Omega)$ para $1 \leq r < 1^*$. Ainda, pelo Lema 1.1.4 segue que $u \in BV(\Omega)$. Assim, calculando o lim sup ambos os lados de (3.20) e usando novamente o Lema 1.1.4 temos que

$$\Phi_0(v) - \Phi_0(u) \geq \int_\Omega f(u)(v-u), \quad \forall v \in BV(\Omega). \tag{3.22}$$

Portanto u é solução de variação limitada de (0.1).

Para verificarmos que $u \neq 0$, note que, considerando $v = u + tu$ para $t > 0$ em (3.22), obtemos

$$\frac{\Phi_0(u+tu) - \Phi_0(u)}{t} \geq \int_\Omega f(u)u dx.$$

Fazendo $t \to 0^+$, segue que

$$\Phi_0'(u)u \geq \int_\Omega f(u)u dx.$$

Usando o mesmo argumento para $t < 0$ e fazendo $t \to 0^-$, segue que

$$\Phi_0'(u)u \leq \int_\Omega f(u)u dx.$$

Então, pelas últimas desigualdades e por (1.4), temos que

$$\Phi_0(u) = \Phi_0'(u)u = \int_\Omega f(u)u dx. \tag{3.23}$$

Utilizando a mesma argumentação com $v = u_n + tu_n$ em (3.20) e fazendo $t \to 0^+$ e $t \to 0^-$, segue que

$$\Phi_0(u_n) = \Phi_0'(u_n)u_n = \int_\Omega f(u_n)u_n dx + o_n(1). \tag{3.24}$$

Portanto, de (3.23), (3.24), (f_2), (f_3) e o Teorema 1.1.10, segue que

$$\begin{aligned} \Phi_0(u) &= \int_\Omega f(u)u dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(u_n)u_n dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \Phi_0(u_n). \end{aligned}$$

Logo, a última igualdade, (f_2), (f_3) e o Teorema 1.1.10, implicam que

$$0 < c = \lim_{n\to\infty} \Phi(u_n) = \Phi(u)$$

e assim $u \neq 0$.

Chapter 3

Aplicação 2: Operador 1-Laplaciano no $\mathbb{R}^N$

Nesse capítulo vamos abordar questões envolvendo a existência de solução não-trivial para problemas no $\mathbb{R}^N$, envolvendo o operador $1-$Laplaciano. De fato desejamos encontrar solução radial de energia mínima entre essas e, para isso, será necessário desenvolver, tal como em [17], argumentos baseados na minimização do funcional energia em conjuntos do tipo *Nehari*. Mais especificamente, estudamos o problema

$$\begin{cases} -\Delta_1 u + \dfrac{u}{|u|} = f(u) \quad \text{em } \mathbb{R}^N, \\ \qquad\qquad\qquad\quad u \in BV(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{0.1}$$

onde $N \geq 2$ e f é uma não-linearidade satisfazendo as seguintes condições

(f_1) $f \in C(\mathbb{R})$;

(f_2) $f(s) = o(1)$ quando $s \to 0$;

(f_3) Existem constantes $c_1, c_2 > 0$ e $p \in (1, 1^*)$ tais que

$$|f(s)| \leq c_1 + c_2|s|^{p-1};$$

(f_4) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{F(t)}{t}$, onde $F(s) = \int_0^s f(t)dt$;

(f_5) f é crescente.

Nosso intuito é demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 3.0.1 *Suponha válidas as hipóteses* $(f_1)-(f_5)$*. Então existe uma solução radial não trivial de (0.1) com a menor energia entre as soluções radiais de variação limitada.*

Definamos os seguintes funcionais, $\Phi_0, \Phi_F, \Phi : BV(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ onde, para $u \in BV(\Omega)$, temos

$$\Phi_0(u) := \int_{\mathbb{R}^N} |Du| + \int_{\mathbb{R}^N} |u| dx,$$

$$\Phi_F(u) := \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx$$

e

$$\Phi(u) := \Phi_0(u) - \Phi_F(u).$$

Assim como no capítulo anterior, o funcional Φ não é diferenciável, mas sim localmente lipschitziano. Uma vez que $\Phi_F \in C^1(BV(\Omega))$, diremos que um ponto crítico de Φ é uma função $u \in BV(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \in \partial\Phi(u)$, o que corresponde, uma vez que Φ_0 é convexo, a $\Phi'_F(u) \in \partial\Phi_0(u)$. Mas isso é equivalente a

$$\Phi_0(v) - \Phi_0(u) \geq \Phi'_F(u)(v-u), \quad \forall v \in BV(\mathbb{R}^N). \tag{0.2}$$

Com uma ligeira modificação do argumento usado na Seção 2.2 do Capítulo 2, é possível mostrar que uma função $u \in BV(\mathbb{R}^N)$ que seja ponto crítico de Φ, satisfaz uma versão de (0.1) onde Δ_1 é substituído pelo divergente de um campo vetorial z que faz o papel de $\nabla u/|\nabla u|$ e a expressão $u/|u|$ é substituída por uma função bem definida em $\mathbb{R}^N$, a qual coincide com $u(x)/|u(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $u(x) \neq 0$.

Como dito no início do capítulo, para encontrar solução de energia mínima vamos desenvolver argumentos baseados em um conjunto do tipo *Nehari*. Essa abordagem foi pioneiramente desenvolvida em [17] e se baseia principalmente no seguintes resultados abstratos.

Teorema 3.0.2 *Sejam* E, F *espaços de Banach,* E *não necessariamente reflexivo, compactamente imerso em* F *e tal que, para toda sequência limitada* $(u_n) \subset E$ *com* $u_n \to u$ *na topologia de* F*, vale que* $u \in E$*. Seja* $\Phi, I_0 : E \to \mathbb{R}$*,* $I : F \to \mathbb{R}$ *funcionais tais que*

$\Phi = I_0 - I|_E$, *onde* I_0 *é localmente lipschitziano,* $I \in C^1(E) \cap C^0(F)$, $I(0) = 0$ *e, para todo* $u \in E$, *existe o seguinte limite*

$$I_0'(su)u := \lim_{t\to 0} \frac{I_0(su+tu) - I_0(su)}{t}, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Suponha ainda que as seguintes hipóteses se verifiquem:

i) I_0 *é semicontínuo inferiormente com respeito à topologia de* F, *isto é, se* (u_n) *for limitada em* E *e* $u \in E$ *for tal que, a menos de subsequência,* $u_n \to u$ *na topologia de* F, *então* $I_0(u) \leq \liminf_{n\to\infty} I_0(u_n)$;

ii) Existem $\rho, \alpha_0 > 0$, *tais que* $\Phi(u) \geq \alpha_0 > \Phi(0)$, *para todo* $u \in E$ *com* $\|u\| = \rho$;

iii) $\forall u \in E$, $\Phi(u) \geq \|u\| - I(u)$;

iv) $t \mapsto \Phi'(tu)u$ *é decrescente em* $(0, +\infty)$;

v) Para toda sequência limitada $(v_n) \subset E$ *tal que* $v_n \to v \neq 0$ *na topologia de* F, *segue que*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(tv_n)}{t} = -\infty, \quad \textit{uniformemente para } n \in \mathbb{N}.$$

Então o ínfimo de Φ *no seguinte conjunto*

$$\mathcal{N} := \{u \in E\backslash\{0\};\ I_0'(u)u = I'(u)u\}$$

é atingido.

Teorema 3.0.3 *Suponha todas as hipóteses do Teorema 3.0.2 verdadeiras. Se* $u_0 \in \mathcal{N}$ *for tal que* $\Phi(u_0) = \min_{\mathcal{N}} \Phi$, *então* u_0 *é um ponto crítico de* Φ *em* E.

Vamos aplicar os dois resultados acima para o funcional $\Phi = \Phi_0 - \Phi_F$, com $E = BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$ e $F = L^p(\mathbb{R}^N)$, para p tal como em (f_3), onde

$$BV_{rad}(\mathbb{R}^N) = \{u \in BV(\mathbb{R}^N);\ u(x) = u(|x|)\}.$$

Caso sejamos capazes de verificar todas as hipóteses dos Teoremas 3.0.2 e 3.0.3, teremos obtido um ponto crítico de Φ quando restrito à $BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Este, por uma versão do

Princípio de Criticalidade Simétrica de Palais provado em [32], será um ponto crítico de Φ em $BV(\mathbb{R}^N)$ e, portanto, uma solução de variação limitada de (0.1).

Para obtermos a compacidade da imersão de $BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, tal como requerido no Teorema 3.0.2, é necessário introduzirmos resultados provados em [18], que consistem em versões em $BV(\mathbb{R}^N)$ de resultados bem conhecidos para espaços de Sobolev usuais. Mais especificamente, em [18][Theorem 1.1] é provado que a imersão $BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$ em $L^q(\mathbb{R}^N)$ é compacta, para todo $1 < q < 1^*$. A demonstração baseia-se em uma versão em $BV(\mathbb{R}^N)$ do conhecido Lema de Strauss, o qual também é demonstrado em [18].

Consideremos então

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &= \{u \in BV_{rad}(\mathbb{R}^N);\ \Phi_0'(u)u = \Phi_F'(u)u\} \\ &= \left\{u \in BV_{rad}(\mathbb{R}^N);\ \int_{\mathbb{R}^N} |Du| + \int_{\mathbb{R}^N} |u|dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)udx\right\}.\end{aligned}$$

No próximo resultado nós provamos que todos os pontos críticos de Φ restrito ao espaço $BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$ pertencem a $\mathcal{N}$. Assim, se provarmos que o ínfimo de Φ em $\mathcal{N}$ é atingido, pelo Teorema 3.0.3 este será um ponto crítico e terá a menor energia entre todas as soluções radiais e não-triviais.

Lema 3.0.4 *Se $u_0 \in BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$, $u_0 \neq 0$ e $0 \in \partial\Phi(u_0)$, então $u \in \mathcal{N}$.*

Demonstração: Se $0 \in \partial\Phi(u_0)$, então

$$\Phi_0(v) - \Phi_0(u_0) \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0)(v - u_0)dx, \quad \forall v \in BV_{rad}(\mathbb{R}^N).$$

Para $t > 0$, tomando $v = u_0 + tu_0$ na última expressão e calculando o limite quando $t \to 0^+$, obtemos

$$\Phi_0(u_0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\Phi_0(u_0 + tu_0) - \Phi_0(u_0)}{t} \geq \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0)u_0dx.$$

Fazendo o mesmo para $t \to 0^-$, obtemos

$$\Phi_0(u_0) = \lim_{t\to 0^-} \frac{\Phi_0(u_0 + tu_0) - \Phi_0(u_0)}{t} \leq \int_{\mathbb{R}^N} f(u_0)u_0dx,$$

de onde segue a igualdade em ambas as expressões acima. Assim $u_0 \in \mathcal{N}$.

□

Verifiquemos então que as condições do Teorema 3.0.2 são satisfeitas. Note que

$$\begin{aligned}\Phi_0'(su)u &= \lim_{t\to 0}\frac{\Phi_0(su+tu)-\Phi_0(su)}{t}\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\frac{(D(su))^a(Du)^a}{|(D(su))^a|}dx+\int_{\mathbb{R}^N}\frac{D(su)}{|D(su)|}(x)\frac{Du}{|Du|}(x)|Du|^s+\int_{\mathbb{R}^N}\mathrm{sgn}(su)udx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}|(Du)^a|dx+\int_{\mathbb{R}^N}|(Du)^s|+\int_{\mathbb{R}^N}|u|dx\end{aligned}$$

É fácil ver que I_0 satisfaz $i)$.

Para $ii)$, observe que por (f_2) e (f_3), para todo $\epsilon>0$, existe C_ϵ tal que

$$|F(s)|\leq \epsilon|s|+C_\epsilon|s|^p,\quad \text{para todo } s\in\mathbb{R}. \tag{0.3}$$

Então, pelas imersões de $BV(\mathbb{R}^N)$ e (0.3), temos que

$$\begin{aligned}\Phi(u) &\geq (1-C\epsilon)\|u\|-CC_\epsilon\|u\|^p\\ &= \|u\|(1-C\epsilon-CC_\epsilon\|u\|^{p-1})\\ &= \rho(1-C\epsilon-CC_\epsilon\rho^{p-1})=:\alpha_0>0=\Phi(0),\end{aligned}$$

onde $\|u\|=\rho$ e $\epsilon,\rho>0$ são pequenos o suficiente.

Pela definição de Φ segue que $iii)$ vale, uma vez que a igualdade se verifica.

Para verificar $iv)$, note que

$$t\mapsto \Phi_F'(tu)u=\int_{\mathbb{R}^N}f(tu)udx$$

é crescente em $(0,+\infty)$ por (f_5). Levando em conta o fato de que $t\mapsto\Phi_0'(tu)u=\Phi_0(u)$ é constante, segue que $t\mapsto\Phi'(tu)u$ é uma função decrescente em $(0,+\infty)$.

Finalmente, para verificar $v)$, seja $(v_n)\subset BV_{rad}(\mathbb{R}^N)$ e $v\in L^p(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$ tal que $v_n\to v$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$. Como $\Phi(u)=\|u\|-\int_{\mathbb{R}^N}F(u)dx$, é suficiente provar que

$$\lim_{t\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(tv_n)}{t}=+\infty\quad\text{uniformemente } n\in\mathbb{N}.$$

Seja $\Gamma=\{x\in\mathbb{R}^N;\, v(x)\neq 0\}$ e note que $|\Gamma|>0$. Pelo Lema de Fatou, segue que, para todo $t>0$,

$$\int_\Gamma\frac{F(tv)}{t}dx\leq\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(tv_n)}{t}dx.$$

Assim, por (f_4) temos que

$$\liminf_{t\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{F(tv_n)}{t}dx\geq\liminf_{t\to\infty}\int_\Gamma\frac{F(tv)}{t}dx=+\infty.$$

Então, para todo $M > 0$, existe $t_0 > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(tv_n)}{t} dx \geq M, \quad \text{para todo } t > t_0 \text{ e } n \geq n_0,$$

o que prova v).

Portanto, uma vez que todas as hipóteses do Teorema 3.0.2 estão satisfeitas, segue a existência de $u_0 \in \mathcal{N}$ tal que

$$\Phi(u_0) = \inf_{v \in \mathcal{N}} \Phi(v).$$

Assim, pelo Teorema 3.0.3 e por [32], segue que u_0 é um ponto crítico de Φ e então, uma solução radial de variação limitada de (0.1), a qual possui a menor energia entre as radiais.

Chapter 4

Um problema envolvendo o operador $1-$biharmônico

Nesse capítulo vamos estudar um resultado de existência de solução não trivial para o seguinte problema quasilinear elíptico envolvendo o operador $1-$biharmônico,

$$\begin{cases} \Delta_1^2 u = \lambda f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = \dfrac{\Delta u}{|\Delta u|} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

onde $\lambda > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira regular, $N \geq 3$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory. O operador $1-$biharmônico é definido por

$$\Delta_1^2 u = \Delta\left(\frac{\Delta u}{|\Delta u|}\right),$$

e pode ser visto como o caso $p = 1$ para o operador $p-$biharmônico $\Delta_p^2 u = \Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u)$, este último muito utilizado no estudo de sistemas de equações de segunda ordem. De fato, a definição precisa de Δ_1^2 será dada na Seção 4.1.2.

Consideraremos uma não-linearidade do tipo "sublinear" com respeito ao operador. Mais especificamente, consideramos as seguintes hipóteses sobre f.

(f_1) $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory, i.e. $f(\cdot, s) : \Omega \to \mathbb{R}$ é mensurável para todo $s \in \mathbb{R}$ e $f(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua para quase todo $x \in \Omega$;

(f_2) Existem $0 < q < 1$, $c_1 > 0$ e uma função $c_2 \in L^\infty(\Omega)$ tais que

$$|f(x,s)| \leq c_1|s|^{q-1} + c_2(x) \quad \text{para quase todo } x \in \Omega \text{ e para todo } s \in \mathbb{R};$$

(f_3) $F(x,t) \geq 0$ em $\Omega \times \mathbb{R}$ e existe $t_0 > 0$ tal que $\displaystyle\int_\Omega F(x,t_0)\,dx > 0$.

Nosso objetivo é o de demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 4.0.1 *Suponha que f satisfaça (f_1), (f_2) e (f_3). Então existe $\lambda_* > 0$ tal que (0.1) possui uma solução não-trivial para todo $\lambda \geq \lambda_*$.*

A prova desse resultado seguirá da aplicação de argumentos de minimização global do funcional energia a ele associado. Entretanto, antes de proceder com esses argumentos, é necessário estudarmos o espaço adequado para se tratar variacionalmente tal problema, o que será feito na seção a seguir.

4.1 O espaço $BL_0(\Omega)$

Denotemos por $BL_0(\Omega)$ o espaço das funções de $W_0^{1,1}(\Omega)$ tais que $\Delta u \in \mathcal{M}(\Omega)$, ou seja

$$BL_0(\Omega) = \left\{u \in W_0^{1,1}(\Omega) : \Delta u \in \mathcal{M}(\Omega)\right\}$$

onde relembramos que $\mathcal{M}(\Omega)$ é o espaço das medidas de Radon em Ω.

Como provado em [30][Proposition 2.2.], temos que

$$BL_0(\Omega) = \left\{u \in W_0^{1,1}(\Omega) : \int_\Omega |\Delta u| < +\infty\right\}$$

onde

$$\int_\Omega |\Delta u| := \sup\left\{\int_\Omega u\,\Delta\,\varphi\,dx :\ \varphi \in C_c^2(\Omega),\ \|\varphi\|_\infty \leq 1\right\}$$

é definida como a variação total da medida Δu.

Definindo $W_\Delta^{2,1}(\Omega) := \{u \in W_0^{1,1}(\Omega);\ \Delta u \in L^1(\Omega)\}$, note que

$$W_\Delta^{2,1}(\Omega) \subset BL_0(\Omega)$$

e ainda, para todo $u \in BL_0(\Omega)$ tal que $u \in W_\Delta^{2,1}(\Omega)$, temos que

$$\int_\Omega |\Delta u| = |\Delta u|_1.$$

Aqui, uma peculiaridade do espaço $BL_0(\Omega)$ há que ser ressaltada. Observe que, denotando por $W_\Delta^{2,2}(\Omega) := \{u \in W_0^{2,1}(\Omega);\ \Delta u \in L^2(\Omega)\}$, por [35][Lemma 8.17] segue

que $W^{2,2}_{\Delta}(\Omega) = H^2 \cap H^1_0(\Omega)$, isto é, se $u \in H^1_0(\Omega)$ for tal que $\Delta u \in L^2(\Omega)$, então isso significa que todas as derivadas fracas de segunda ordem pertencem a $L^2(\Omega)$. Quando se trabalha com subespaços de $L^1(\Omega)$, isso não mais é verdadeiro, isto é, para uma função $u \in W^{1,1}_0(\Omega)$, apenas com a informação de que $\Delta u \in L^1(\Omega)$, se $N \geq 2$, não se pode afirmar que todas as derivadas fracas de segunda ordem são distribuições representadas por funções de $L^1(\Omega)$ (conforme [15]).

Vamos munir o espaço $BL_0(\Omega)$ com a seguinte norma

$$\|u\|_0 = |u|_1 + |\nabla u|_1 + \int_\Omega |\Delta u| \quad \text{para } u \in BL_0(\Omega).$$

O espaço $BL_0(\Omega)$, como veremos, compartilha muitas propriedades em comum com o espaço $BV(\Omega)$. Essas serão expostas nos próximos lemas, cujas demonstrações serão suprimidas por serem absolutamente análogas às respectivas para o espaço $BV(\Omega)$. O leitor interessado em tais demonstrações pode encontra-las em [9, 30].

Lema 4.1.1 *Seja $(u_n) \subset BL_0(\Omega)$ uma sequência limitada tal que $u_n \to u$ in $L^r(\Omega)$, com $1 \leq r \leq N/(N-2)$. Então $u \in BL_0(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |\Delta u| \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\Delta u_n|. \tag{1.2}$$

Pode-se ainda provar que o espaço $(BL_0(\Omega), \|\cdot\|_0)$ é um espaço de Banach.

Assim como o espaço $BV(\Omega)$, na topologia da norma de $BL_0(\Omega)$ o conjunto das funções $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap BL_0(\Omega)$ não constituem um conjunto denso. Porém, aqui também há uma topologia segundo a qual essa densidade de fato se verifica. Para isso necessitamos introduzir a seguinte noção de convergência.

Definição 4.1.2 *Dizemos que uma sequência $(u_n) \subset BL_0(\Omega)$ converge estritamente para $u \in BL_0(\Omega)$ se*

- *$u_n \to u$ in $W^{1,1}_0(\Omega)$ quando $n \to +\infty$,*
- *$\displaystyle\int_\Omega |\Delta u_n| \to \int_\Omega |\Delta u|$ quando $n \to +\infty$.*

A seguir enunciamos a densidade de $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap BL_0(\Omega)$ em $BL_0(\Omega)$ com respeito à noção de convergência introduzida acima.

Proposição 4.1.3 *Para todo $u \in BL_0(\Omega)$ existe uma sequência $(u_n) \subset C^\infty(\overline{\Omega}) \cap BL_0(\Omega)$ tal que*

$$u_n \to u \quad in\ W_0^{1,1}(\Omega)\ quando\ n \to +\infty \tag{1.3}$$

e

$$\int_\Omega |\Delta u_n| dx \to \int_\Omega |\Delta u| \quad quando\ n \to +\infty. \tag{1.4}$$

Como veremos a seguir, as imersões de Sobolev também valem para esse espaço.

Proposição 4.1.4 *A imersão*

$$BL_0(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

é contínua para todo $p \in [1, 1^{**}]$, onde $1^{**} := N/(N-2)$. Mais precisamente, existe uma constante $C := C(\Omega, p, N) > 0$ tal que

$$\|u\|_p \leq C \|u\|_0 \quad para\ todo\ u \in BL_0(\Omega).$$

Além disso, a imersão

$$BL_0(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

é compacta para todo $p \in [1, 1^{**})$.

No problema específico que vamos tratar, seria interessante que $u \mapsto \int_\Omega |\Delta u|$ definisse uma norma em $BL_0(\Omega)$ equivalente a $\|\cdot\|_0$. Mostraremos que de fato isso acontece a seguir.

Por (1.1.13) e os resultados em [11][Theorem 1.2 and Proposition 2.1] de Brézis e Ponce, podemos definir em $BL_0(\Omega)$ a seguinte norma

$$\|u\| = \int_\Omega |\Delta u| \quad \text{para todo } u \in BL_0(\Omega)$$

a qual é equivalente a $\|\cdot\|_0$. De fato, se $u \in BL_0(\Omega)$, note que, como $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$, então $\int_\Omega |Du| = \int_\Omega |\nabla u| dx$. Assim, por (1.1.13), segue que

$$\begin{aligned} \|u\|_0 &\leq (C+1)\|\nabla u\|_1 + \int_\Omega |\Delta u| \\ &\leq C_1 \int_\Omega |\Delta u|. \end{aligned}$$

4.1.1 O funcional energia

Nessa seção vamos definir o funcional energia em $BL_0(\Omega)$, cuja equação de Euler-Lagrange (pelo menos em sua versão não-precisa ou formal) é dada por (0.1). Seja $\Phi : BL_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi(u) = \int_\Omega |\Delta u| - \int_\Omega F(x,u)\,dx \quad \text{para todo } u \in BL_0(\Omega).$$

Vamos introduzir ainda os funcionais $\Phi_0 : BL_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ e $\Phi_F : BL_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ definidos por

$$\Phi_0(u) = \int_\Omega |\Delta u| \quad \text{para todo } u \in BL_0(\Omega)$$

e

$$\Phi_F(u) = \int_\Omega \lambda F(x,u)\,dx \quad \text{para todo } u \in BL_0(\Omega),$$

de forma que

$$\Phi(u) = \Phi_0(u) - \Phi_F(u) \quad \text{para todo } u \in BL_0(\Omega).$$

Embora não seja $C^1(BL_0(\Omega),\mathbb{R})$, observe que o funcional Φ_0 é convexo e lipschitziano e de fato admite derivadas direcionais em algumas direções. De fato, como mostrado por Anzellotti em [7], dado $u \in BL_0(\Omega)$, para todo $v \in BL_0(\Omega)$ tal que $(\Delta v)^s$ seja uma medida absolutamente contínua com respeito a $(\Delta u)^s$, temos que

$$\Phi_0'(u)v = \int_\Omega \frac{(\Delta u)^a(\Delta v)^a}{|(\Delta u)^a|}\,dx + \int_\Omega \frac{\Delta u}{|\Delta u|}(x)\frac{\Delta v}{|\Delta v|}(x)|(\Delta v)^s|. \tag{1.5}$$

Uma vez que estamos tratando de um funcional que se escreve como a diferença entre um convexo e lipschitziano, Φ_0 e um $C^1(BL_0(\Omega),\mathbb{R})$, Φ_F, usaremos novamente a teoria de subdiferenciais de K. Chang [12] e F. Clarke [14] para definir o que entendemos por uma solução de (0.1). Diremos que $u \in BL_0(\Omega)$ é uma *solução de variação limitada* de (0.1) se $0 \in \partial\Phi(u)$, i.e., se $\Phi_F'(u) \in \partial\Phi_0(u)$ onde $\partial\Phi_0(u)$ denota o subdiferencial de Φ_0 em u. Devido à convexidade de Φ_0, isso pode ser expresso através de

$$\Phi_0(v) - \Phi_0(u) \geq \Phi_F'(u)(v-u) \quad \text{para todo} v \in BL_0(\Omega). \tag{1.6}$$

4.1.2 A equação de Euler-Lagrange

Nessa seção vamos estudar a versão precisa da equação de Euler-Lagrange satisfeita por pontos críticos de Φ. Mais especificamente vamos provar que se $u \in BL_0(\Omega)$ for tal que

$0 \in \partial\Phi(u)$, então existe um campo vetorial $z \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, o qual faz o papel de $\dfrac{\Delta u}{|\Delta u|}$ em (0.1) e está bem definido mesmo onde $\Delta u = 0$. Para isso, será necessário estender os funcional Φ a $L^{1^{**}}(\Omega)$ e então usar algumas ferramentas de análise convexa.

Consideremos as extensões dos funcionais Φ_0, Φ_F e Φ, dadas respectivamente por $\overline{\Phi_0}, \overline{\Phi_F}, \overline{\Phi} : L^{1^{**}}(\Omega) \to \mathbb{R}$, onde

$$\overline{\Phi_0}(u) = \begin{cases} \Phi_0(u) & \text{se } u \in BL_0(\Omega), \\ +\infty & \text{se } u \in L^{1^{**}}(\Omega) \backslash BL_0(\Omega), \end{cases}$$

$$\overline{\Phi_F}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \lambda F(x,u)dx$$

e $\overline{\Phi} = \overline{\Phi_0} - \overline{\Phi_F}$. É fácil ver que $\overline{\Phi_F}$ é um funcional $C^1(L^{1^{**}}(\Omega))$ e que ainda $\overline{\Phi_0}$ é convexo e semicontínuo inferiormente em $L^{1^{**}}(\mathbb{R}^N)$. Assim o subdiferencial (como definido por A. Szulkin em [34]) de $\overline{\Phi_0}$, denotado por $\partial\overline{\Phi_0}$, está bem definido. O próximo resultado é crucial para obter a equação de Euler-Lagrange satisfeita pelos pontos críticos de Φ.

Lema 4.1.5 *Se $u \in BL_0(\Omega)$ for tal que $0 \in \partial\Phi(u)$, então $0 \in \partial\overline{\Phi}(u)$.*

Demonstração: Suponha que $u \in BL_0(\Omega)$ seja tal que $0 \in \partial\Phi(u)$. Então u satisfaz (1.6). Para $v \in L^{1^{**}}(\Omega)$, note que:

- se $u \in BL_0(\Omega) \cap L^{1^{**}}(\Omega)$, então

$$\begin{aligned} \overline{\Phi_0}(v) - \overline{\Phi_0}(u) &= \Phi_0(v) - \Phi_0(u) \\ &\geq \Phi_F'(u)(v-u) \\ &= \int_\Omega \lambda f(u)(v-u)\,dx \\ &= \overline{\Phi_F}'(u)(v-u); \end{aligned}$$

- se $u \in L^{1^{**}}(\Omega)\backslash BL_0(\Omega)$, como $\overline{\Phi_0}(v) = +\infty$ e $\overline{\Phi_0}(u) < +\infty$, temos que

$$\begin{aligned} \overline{\Phi_0}(v) - \overline{\Phi_0}(u) &= +\infty \\ &\geq \overline{\Phi_F}'(u)(v-u). \end{aligned}$$

Assim, nos dois casos $0 \in \partial\overline{\Phi}(u)$.

□

Se $u \in BL_0(\Omega)$ for uma solução de variação limitada de (**??**), pelo último resultado temos que $0 \in \partial\overline{\Phi}(u)$. Como $\overline{\Phi_0}$ é convexo e $\overline{\Phi_F}$ suave, temos que $\overline{\Phi_F}'(u) \in \partial\overline{\Phi_0}(u)$. Como mostrado em [30, Proposition 5.2], existe $z^* \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que $\|z^*\|_\infty \leq 1$,

$$\Delta z^* = \overline{\Phi_F}'(u) \quad \text{em } L^N(\Omega) \tag{1.7}$$

no sentido das distribuições e

$$\overline{\Phi_0}(u) = \int_\Omega u\Delta z^*\, dx. \tag{1.8}$$

Portanto segue de (1.7) e (1.8) que u satisfaz

$$\begin{cases} \exists\, z^* \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega),\ \|z^*\|_\infty \leq 1,\ \Delta z^* \in L^N(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega u\Delta z^* dx = \int_\Omega |\Delta u|, \\ \Delta z^* = \lambda f(x,u), \quad \text{quase sempre em } \Omega. \end{cases} \tag{1.9}$$

Logo (1.9) é a versão precisa de (0.1).

Observação 4.1.6 *Observe que a condição de fronteira* $\dfrac{\Delta u}{|\Delta u|} = 0$ *sobre* $\partial\Omega$ *está contemplada na definição de* z^**, uma vez que* $z^* \in W_0^{1,1}(\Omega)$ *implica que* $z^* = 0$ *sobre* $\partial\Omega$ *no sentido do traço.*

4.2 Demonstração do Teorema 4.0.1

Para provar o Teorema 4.0.1, vamos provar primeiramente que o funcional Φ é coercivo em $BL_0(\Omega)$. Por (f_2), pela Desigualdade de Hölder e pela Proposição 4.1.4, segue que

$$\begin{aligned} \Phi(u) &\geq \|u\| - c_1\lambda \int_\Omega |u|^q\, dx - \lambda \int_\Omega c_2(x)\, dx \\ &\geq \|u\| - C|u|_1^q - C \\ &\geq \|u\| - C\|u\|^q - C, \end{aligned}$$

implicando que Φ é coercivo e também limitado inferiormente.

Seja $(u_n) \subset BL_0(\Omega)$ uma sequência minimizante para Φ, isto é, $\Phi(u_n) \to \beta$, onde $\beta = \inf_{BL_0(\Omega)} \Phi$. A coercividade de Φ implica que (u_n) é limitado em $BL_0(\Omega)$. Então, pela Proposição 4.1.4, temos que, a menos de subsequência, existe $u \in L^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$

em $L^1(\Omega)$. Pelo Lema 4.1.1, segue que $u \in BL_0(\Omega)$ e ainda que (1.2) vale. Assim,

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \int_\Omega |\Delta u| - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx \\ &\leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega |\Delta u_n| - \lim_{n\to+\infty} \lambda \int_\Omega F(x,u_n)dx \\ &= \beta,\end{aligned}$$

de onde segue que $\Phi(u) = \beta$ e então u é um minimizante global. Agora vamos mostrar que u é uma solução de variação limitada de (0.1). Para todo $v \in BL_0(\Omega)$ e $t > 0$, note que pela convexidade de Φ_0, temos que

$$\begin{aligned}\Phi_0(u) - \Phi_F(u) &\leq \Phi_0((1-t)u + tv) - \Phi_F((1-t)u + tv) \\ &\leq (1-t)\Phi_0(u) + t\Phi_0(v) - \Phi_F((1-t)u + tv).\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}\Phi_0(v) - \Phi_0(u) &\geq \frac{1}{t}\left(\Phi_F(t(v-u)+u) - \Phi_F(u)\right) \\ &\geq \int_0^1 \Phi_F'(u + st(v-u))ds(v-u).\end{aligned}$$

Fazendo $t \to 0^+$ temos que u satisfaz (1.6).

Somente nos resta provar que u é uma solução não-trivial de (0.1). Esse é o único ponto onde a condição (f_3) será utilizada. Vamos considerar $x_0 \subset \Omega$ e $r, \delta > 0$ tais que $B_r(x_0) \subset \overline{B_{r+\delta}(x_0)} \subset \Omega$. Definamos $w : \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \Omega \backslash B_{r+\delta}(x_0), \\ t_0 & \text{se } x \in B_r(x_0), \\ \dfrac{t_0}{\delta}(r + \delta - |x - x_0|) & \text{se } x \in B_{r+\delta}(x_0)\backslash B_r(x_0). \end{cases}$$

Observe que $w \in W_0^{1,1}(\Omega)$ e, no sentido das distribuições

$$\Delta w = -\frac{t_0}{\delta}\frac{(N-1)}{|x-x_0|}\chi_{B_{r+\delta}(x_0)\backslash B_r(x_0)} + \frac{t_0}{\delta}\,\mathcal{H}^{N-1}\big|_{\partial B_{r+\delta}(x_0)} - \frac{t_0}{\delta}\,\mathcal{H}^{N-1}\big|_{\partial B_r(x_0)} \in \mathcal{M}(\Omega).$$

Então,

$$\begin{aligned}\Phi(w) &= \int_\Omega |\Delta w| - \lambda \int_\Omega F(x,w)\,dx \\ &\leq \int_\Omega |\Delta w| - \lambda \int_{B_r(x_0)} F(x,t_0)\,dx,\end{aligned}$$

o que, levando-se em conta (f_3), é negativo para $\lambda \geq \lambda^*$ onde λ^* é grande o suficiente. Logo segue que $\beta = \inf_{BL_0(\Omega)} \Phi < 0$ e que u é uma solução não-trivial de (0.1).

Part II

Aproximação por problemas envolvendo o operador $p-$laplaciano

Chapter 5

Soluções nodais para problemas envolvendo o operador $1-$laplaciano

Nesse capítulo, veremos alguns resultados do trabalho [20] e estudaremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\text{div}\left(\dfrac{Du}{|Du|}\right) &= f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

onde $N \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto, limitado e com fronteira Lipschitz. A não-linearidade f, por outro lado, satisfaz as seguintes hipóteses:

(f_1) $f \in C^0(\mathbb{R})$;

(f_2) existe $\alpha > 0$ tal que $\limsup_{|s|\to 0} \dfrac{f(s)}{|s|^\alpha} < +\infty$;

(f_3) existem constantes $c_1, c_2 > 0$ e $q \in (1, 1^*)$ tais que

$$|f(s)| \leq c_1 + c_2|s|^{q-1}, \quad s \in \mathbb{R},$$

onde $1^* = N/(N-1)$;

(f_4) existe $\kappa > 1$ tal que

$$0 < \kappa F(s) \leq f(s)s,$$

para todo $s \neq 0$;

(f_5) f é crescente para $s \in \mathbb{R}$.

O principal resultado desses capítulo é o seguinte teorema.

Teorema 5.0.1 *Suponha que f satisfaça $(f_1)-(f_5)$. Então existe $u_0 \in BV(\Omega)$, solução nodal de variação limitada de (0.1). Isto é, existem $u_0 \in BV(\Omega)$ e $\boldsymbol{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tais que $u_0^\pm \neq 0$, $\|\boldsymbol{z}\|_\infty \leq 1$ e*

$$\begin{cases} -div\, \boldsymbol{z} &= f(u_0) \text{ q.s. em } \Omega, \\ (\boldsymbol{z}, Du_0) &= |Du_0| \text{ em } \mathcal{M}(\Omega), \\ [\boldsymbol{z}, \nu] &\in sign(-u_0) \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

5.1 Preliminares

Nessa seção, em vários argumentos, necessitaremos de uma espécie de Fórmula de Green para expressões como $w\,\mathrm{div}(\mathbf{z})$, onde $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\mathrm{div}(\mathbf{z}) \in L^N(\Omega)$ e $w \in BV(\Omega)$. Para isso, precisamos lidar com o produto entre $\mathbf{z}$ e Dw, o qual denotamos por $(\mathbf{z}, Dw)$. Isso pode ser feito através da *pairing theory*, desenvolvida por Anzellotti em [6]

Denotemos

$$X_N(\Omega) = \left\{\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N);\, \mathrm{div}(\mathbf{z}) \in L^N(\Omega)\right\}.$$

Para $\mathbf{z} \in X_N(\Omega)$ e $w \in BV(\Omega)$, definimos a distribuição $(\mathbf{z}, Dw) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ por

$$\langle (\mathbf{z}, Dw), \varphi \rangle := -\int_\Omega w\varphi\, \mathrm{div}(\mathbf{z})dx - \int_\Omega w\mathbf{z} \cdot \nabla\varphi dx,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pode ser provado que de fato a distribuição $(\mathbf{z}, Dw)$ é gerada por uma medida de Radon tal que

$$\left|\int_B (\mathbf{z}, Dw)\right| \leq |\mathbf{z}|_\infty \int_B |Dw|, \tag{1.2}$$

para todo boreliano $B \subset \Omega$.

Para definir um análogo da Fórmula de Green, é necessário descrever o traço do campo $\mathbf{z}$. De fato, prova-se que existe um operador traço $[\cdot, \nu] : X_N(\Omega) \to L^\infty(\partial\Omega)$ tal que

$$|\,[\mathbf{z}, \nu]\,|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq |\mathbf{z}|_\infty \tag{1.3}$$

e, se $\mathbf{z} \in C^1(\overline{\Omega}_\delta, \mathbb{R}^N)$,

$$[\mathbf{z}, \nu]\,(x) = \mathbf{z}(x) \cdot \nu(x) \quad \text{sobre } \Omega_\delta,$$

onde Ω_δ denota uma δ-vizinhança de $\partial\Omega$. Levando em conta essas definições, podemos provar a seguinte versão da Fórmula de Green, onde $\mathbf{z} \in X_N(\Omega)$ e $w \in BV(\Omega)$,

$$\int_\Omega w \,\mathrm{div}(\mathbf{z})dx + \int_\Omega (\mathbf{z}, Dw) = \int_{\partial\Omega} [\mathbf{z}, \nu] w d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{1.4}$$

5.2 Demonstração do Teorema 5.0.1

Para $p > 1$, consideremos o problema

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) &= f(u) \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.5}$$

cuja forma fraca é dada pela seguinte identidade integral

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(u)v dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.6}$$

Sabe-se que soluções fracas de (2.5) são pontos críticos do funcional energia $I_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por

$$I_p(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega F(u)dx,$$

o qual está bem definido para todo $1 < p < N$, uma vez que, por (f_3),

$$\int_\Omega F(u)dx \le c_1|u|_1 + c_3|u|_q^q,$$

onde $q < N/(N-1) < pN/(N-p)$.

Consideremos o funcional $\Phi_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi_p(u) := I_p(u) + \frac{p-1}{p}|\Omega|$$

e note que, para cada u tal que $\Phi_p(u)$ está bem definido, $(\Phi_p(u))_{p>1}$ é não-decrescente. De fato, se $1 < p_1 \le p_2 < N$, então pela Desigualdade de Young com os expoentes p_2/p_1 and $p_2/(p_2 - p_1)$, temos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p_1} dx \le \frac{p_1}{p_2}\int_\Omega |\nabla u|^{p_2} dx + \frac{p_2 - p_1}{p_2}|\Omega|. \tag{2.7}$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned} \Phi_{p_1}(u) &= \frac{1}{p_1}\int_\Omega |\nabla u|^{p_1} dx + \frac{p_1 - 1}{p_1}|\Omega| - \int_\Omega F(u)dx \\ &\le \frac{1}{p_1}\left(\frac{p_1}{p_2}\int_\Omega |\nabla u|^{p_2} dx + \frac{p_2 - p_1}{p_2}|\Omega|\right) + \frac{p_1 - 1}{p_1}|\Omega| - \int_\Omega F(u)dx \\ &= \Phi_{p_2}(u). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Como Φ_p e I_p diferem apenas por uma constante, podemos estudar (2.5) desde um ponto de vista variacional, por meio de ambos os funcionais I_p ou Φ_p.

Por (f_2), para $p > 1$ suficientemente próximo de 1, a função f satisfaz

$$\limsup_{s\to 0} \frac{f(s)}{|s|^p} = 0.$$

Então, para cada tal p, a variedade de Nehari associada a (2.5) está bem definida e é dada por

$$\mathcal{N}_p^{\pm} = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega); u^{\pm} \neq 0 \text{ e } \Phi_p'(u^{\pm})u^{\pm} = 0\}.$$

Pode-se provar que existe $u_p \in \mathcal{N}_p^{\pm}$ (ver por exemplo [10]) tal que

$$\Phi_p(u_p) = \min_{v\in\mathcal{N}_p^{\pm}} \Phi_p(v) \tag{2.9}$$

e u_p é uma solução nodal de (2.5), a qual possui a menor energia entre todas aquelas que mudam de sinal. Pode-se provar ainda que

$$\Phi_p(u_p) = \max_{t,s>0} \Phi_p(tu_p^+ + su_p^-). \tag{2.10}$$

Além disso, para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u^{\pm} \neq 0$, existem $t, s > 0$ tais que

$$tu^+ + su^- \in \mathcal{N}_p^{\pm}.$$

Lema 5.2.1 *A família $(\Phi_p(u_p))_p$ é não-decrescente para $p \in (1, N)$.*

Demonstração: Seja $1 < p_1 \leq p_2 < N$, $u_{p_1} \in W_0^{1,p_1}(\Omega)$ e $u_{p_2} \in W_0^{1,p_2}(\Omega)$ satisfazendo (2.9). Como $p_2 \geq p_1$, então $W_0^{1,p_2}(\Omega) \subset W_0^{1,p_1}(\Omega)$, de forma que, como $u_{p_2}^{\pm} \neq 0$, então existem $t, s > 0$ tais que

$$tu_{p_2}^+ + su_{p_2}^- \in \mathcal{N}_{p_1}^{\pm}. \tag{2.11}$$

Então, de (2.8), (2.9), (2.10) e (2.11), segue que

$$\begin{aligned} \Phi_{p_2}(u_{p_2}) &\geq \Phi_{p_2}(tu_{p_2}^+ + su_{p_2}^-) \\ &\geq \Phi_{p_1}(tu_{p_2}^+ + su_{p_2}^-) \\ &\geq \Phi_{p_1}(u_{p_1}). \end{aligned}$$

□

Lema 5.2.2 *Para $\overline{p} \in (1, N)$, a família $(u_p)_{1<p<\overline{p}}$ é limitada em $BV(\Omega)$.*

Demonstração: Pelo Lema 5.2.1, segue que, para $\overline{p} \in (1, N)$ fixado

$$\Phi_p(u_p) \leq \Phi_{\overline{p}}(u_{\overline{p}}) =: C, \tag{2.12}$$

para todo $p \in (1, \overline{p})$. Assim, existe $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx \leq C, \quad \forall p \in (1, \overline{p}). \tag{2.13}$$

De fato, por (f_4) e (2.12), note que

$$\begin{aligned} C &\geq \Phi_p(u_p) \\ &= \Phi_p(u_p) - \frac{1}{\kappa}\Phi_p'(u_p)u_p \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\kappa}\right)\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx + \int_\Omega \left(\frac{1}{\kappa} f(u_p)u_p - F(u_p)\right) dx \\ &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\kappa}\right)\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx \\ &\geq \left(\frac{1}{\overline{p}} - \frac{1}{\kappa}\right)\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Assim, pela desigualdade de Young e (2.14),

$$\begin{aligned} \|u_p\| &= \int_\Omega |\nabla u_p| dx \\ &\leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx + \frac{p-1}{p}|\Omega| \\ &\leq C_1. \end{aligned}$$

□

Do último resultado e das imersões compactas de Sobolev, temos que existe $u_0 \in BV(\Omega)$ tal que

$$u_p \to u_0, \quad \text{em } L^r(\Omega), \text{ para todo } 1 \leq r < 1^*, \tag{2.15}$$

e

$$u_p \to u_0, \quad \text{q.s. em } \Omega, \tag{2.16}$$

quando $p \to 1^+$.

Além disso, o Lema 5.2.2 também implica que (ver [3][Proposition 3]) existe $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, tal que $|\mathbf{z}|_\infty \leq 1$ e

$$|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p \rightharpoonup \mathbf{z}, \tag{2.17}$$

em $L^r(\Omega, \mathbb{R}^N)$, quando $p \to 1^+$, para todo $1 \leq r < \infty$. Em particular

$$|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p \to \operatorname{div} \mathbf{z} \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega) \tag{2.18}$$

quando $p \to 1^+$, o que segue considerando $\nabla\varphi$ como função teste em (2.17), onde $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Note que, de (2.5), (2.15), (2.18) e aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$-\operatorname{div} \mathbf{z} = f(u_0), \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{2.19}$$

Lema 5.2.3 *A função u_0 e o campo vetorial $\boldsymbol{z}$ satisfazem a seguinte igualdade no sentido de medidas de Radon em Ω,*

$$(\boldsymbol{z}, Du_0) = |Du_0|.$$

Demonstração: Primeiramente, note que, como $|\mathbf{z}|_\infty \leq 1$, segue que, $(\mathbf{z}, Du_0) \leq |Du_0|$. De fato, para todo boreliano $B \subset \Omega$, por (1.2),

$$\begin{aligned} \int_B (\mathbf{z}, Du_0) &\leq \left| \int_B (\mathbf{z}, Du_0) \right| \\ &\leq |\mathbf{z}|_\infty \int_B |Du_0| \\ &\leq \int_B |Du_0|. \end{aligned}$$

Assim, é suficiente mostrarmos a desigualdade contrária, isto é, que para todo $\varphi \in C_0^1(\Omega)$, $\varphi \geq 0$,

$$\langle (\mathbf{z}, Du_0), \varphi \rangle \geq \int_\Omega \varphi |Du_0|. \tag{2.20}$$

Para isso, vamos considerar $u_p\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ como função teste em (2.6). Então obtemos

$$\int_\Omega \varphi |\nabla u_p|^p dx + \int_\Omega u_p |\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p \nabla\varphi dx = \int_\Omega f(u_p) u_p \varphi dx. \tag{2.21}$$

Agora, devemos calcular $\liminf$ quando $p \to 1^+$ em ambos os lados de (2.21). Antes disso, porém, note que

$$\int_\Omega \varphi |Du_0| \leq \liminf_{p \to 1^+} \int_\Omega |\nabla u_p|^p \varphi dx. \tag{2.22}$$

De fato, pela desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi|Du_0| &\leq \liminf_{p\to 1^+}\int_\Omega \varphi|\nabla u_p|dx\\ &\leq \liminf_{p\to 1^+}\left(\frac{1}{p}\int_\Omega \varphi|\nabla u_p|^p dx + \frac{p-1}{p}\int_\Omega \varphi dx\right)\\ &= \liminf_{p\to 1^+}\int_\Omega \varphi|\nabla u_p|^p dx.\end{aligned}$$

Além disso, por (2.18), segue que

$$\lim_{p\to 1^+}\int_\Omega u_p|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p\nabla\varphi dx = \int_\Omega u_0\mathbf{z}\nabla\varphi dx. \tag{2.23}$$

Finalmente, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e por (2.15), temos que

$$\lim_{p\to 1^+}\int_\Omega f(u_p)u_p\varphi dx = \int_\Omega f(u_0)u_0\varphi dx. \tag{2.24}$$

Então, de (2.19), (2.22), (2.23) e (2.24), segue que

$$\begin{aligned}\langle(\mathbf{z}, Du_0),\varphi\rangle &= -\int_\Omega \varphi u_0 \mathrm{div}\mathbf{z} - \int_\Omega u_0\mathbf{z}\nabla\varphi dx\\ &= \int_\Omega f(u_0)u_0\varphi dx - \int_\Omega u_0\mathbf{z}\nabla\varphi dx\\ &= \lim_{p\to 1^+}\left(\int_\Omega f(u_p)u_p\varphi dx - \int_\Omega u_p|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p\nabla\varphi dx\right)\\ &= \liminf_{p\to 1^+}\int_\Omega \varphi|\nabla u_p|^p dx\\ &\geq \int_\Omega \varphi|Du_0|,\end{aligned}$$

o que implica em (2.20) e finaliza a prova. □

Lema 5.2.4 *A função u_0 satisfaz $[\boldsymbol{z},\nu]\in sign(-u_0)$ sobre $\partial\Omega$.*

Demonstração: Devemos provar que

$$|u_0| + [\mathbf{z},\nu]\,u_0 = 0 \text{ on } \partial\Omega. \tag{2.25}$$

Mas como, por (1.3)

$$|\,[\mathbf{z},\nu]\,u_0| \leq \|\mathbf{z}\|_\infty|u_0| \leq |u_0|,$$

segue que

$$|u_0| + [\mathbf{z},\nu]\,u_0 \geq 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \tag{2.26}$$

Agora, para $\varphi \in C_0^1(\Omega)$, consideremos $(u_p - \varphi) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ como função teste em (2.6). Então temos que

$$\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx = \int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \nabla \varphi dx + \int_\Omega f(u_p)(u_p - \varphi) dx. \tag{2.27}$$

Da desigualdade de Young, pela fórmula de Green, (2.18), (2.19), Lema 6.3.4 e (2.27), temos que, quando $p \to 1^+$,

$$\begin{aligned}
p\int_\Omega |\nabla u_p| dx &= \int_\Omega |\nabla u_p|^p dx + (p-1)|\Omega| \\
&= \int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2} \nabla u_p \nabla \varphi dx + \int_\Omega f(u_p)(u_p - \varphi) dx + (p-1)|\Omega| \\
&= \int_\Omega \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi dx + \int_\Omega f(u)(u - \varphi) dx + o(1) \\
&= -\int_\Omega \varphi \mathrm{div}\mathbf{z} - \int_\Omega f(u_0)\varphi dx + \int_\Omega f(u_0)u_0 dx + o(1) \\
&= \int_\Omega f(u_0)u_0 dx + o(1) \\
&= -\int_\Omega u_0 \mathrm{div}\mathbf{z} + o(1) \\
&= \int_\Omega (\mathbf{z}, Du_0) - \int_{\partial\Omega} [\mathbf{z}, \nu]\, u d\mathcal{H}^{N-1} \\
&= \int_\Omega |Du_0| - \int_{\partial\Omega} [\mathbf{z}, \nu]\, u_0 d\mathcal{H}^{N-1}.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Assim, de (2.28) e pela semicontinuidade inferior da norma de $BV(\Omega)$ com respeito à convergência de $L^1(\Omega)$, segue que

$$\int_{\partial\Omega} (|u_0| + [\mathbf{z}, \nu]\, u_0)\, d\mathcal{H}^{N-1} \leq 0. \tag{2.29}$$

Então, levando em conta (2.26) e (2.29), obtemos que

$$|u_0| + [\mathbf{z}, \nu]\, u_0 = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

de onde segue o resultado. □

Até agora, de (2.19) e pelos Lemas 5.2.3 e 5.2.4, encontramos $u_0 \in BV(\Omega)$, para o qual existe $\mathbf{z} \in X_N(\Omega)$ tal que $|\mathbf{z}|_\infty \leq 1$ e

$$\begin{cases}
-\mathrm{div}\,(\mathbf{z}) &= f(u_0) \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \\
(\mathbf{z}, Du_0) &= |Du_0| \text{ em } \mathcal{M}(\Omega), \\
[\mathbf{z}, \nu] &\in sign(-u_0) \text{ sobre } \partial\Omega.
\end{cases} \tag{2.30}$$

Resta então demonstrar que $u_0 \neq 0$. Para isso, devemos introduzir o funcional energia $\Phi : BV(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi(u) = \|u\| - \int_\Omega F(u)dx.$$

Primeiramente, note que pela desigualdade de Young, $\Phi(u) \leq \Phi_p(u)$ para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso,

$$\lim_{p\to 1^+} \Phi_p(u_p) = \Phi(u_0). \tag{2.31}$$

De fato, como u_0 satisfaz (2.30), note que, quando $p \to 1^+$,

$$\begin{aligned}
\|u_0\| &= \int_\Omega |Du_0| + \int_{\partial\Omega} |u_0| d\mathcal{H}^{N-1} \\
&= \int_\Omega (\mathbf{z}, Du_0) - \int_{\partial\Omega} u_0 \,[\mathbf{z}, \nu]\, d\mathcal{H}^{N-1} \\
&= -\int_\Omega u_0 \,\mathrm{div}\mathbf{z}\, dx \\
&= \int_\Omega f(u_0)u_0 dx \\
&= \frac{1}{p}\int_\Omega f(u_p)u_p dx + o(1) \\
&= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx + o(1).
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Além disso, por (f_3), (2.15) e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, quando $p \to 1^+$,

$$\int_\Omega F(u_0)dx = \int_\Omega F(u_p)dx + o(1). \tag{2.33}$$

Assim, (2.32) e (2.33) implicam em (2.31).

Note que, por $(f_2)'$ e (f_3), para todo $\epsilon > 0$, existe uma constante positiva $C_\epsilon > 0$ tal que

$$|f(s)s| \leq \epsilon|s| + C_\epsilon|s|^q, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Então,

$$\Phi(u) \;\geq\; (1-\epsilon)\|u\| - C\|u\|^q.$$

Consideremos $\epsilon > 0$ tal que $1 - \epsilon > 1/2$. Então, se $\|u\| \leq \rho$, onde $0 < \rho < \left(\dfrac{(1-\epsilon) - 1/2}{C_\epsilon}\right)^{\frac{1}{q-1}}$, segue que

$$\Phi(u) \geq \frac{\|u\|}{2}. \tag{2.34}$$

Então, como o fato de u_p pertencer ao conjunto de Nehari nodal $\mathcal{N}_p^{\pm}$ implica que $u_p^{\pm} \in \mathcal{N}_p$, segue que $s = 1$ é o ponto de máximo da função $s \mapsto \Phi_p(su_p^{\pm})$. Assim, para todo $p \in (1, \overline{p})$,

$$\begin{aligned} \Phi_p(u_p^{\pm}) &\geq \Phi_p\left(\frac{\rho u_p^{\pm}}{\|u_p^{\pm}\|}\right) && (2.35)\\ &\geq \Phi\left(\frac{\rho u_p^{\pm}}{\|u_p^{\pm}\|}\right) && (2.36)\\ &\geq \frac{\rho}{2}, && (2.37) \end{aligned}$$

onde usamos (2.34) e ainda o fato de que $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow BV(\Omega)$. Assim,

$$\frac{\rho}{2} \leq \Phi_p(u_p^{\pm}) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{p} f(u_p^{\pm}) u_p^{\pm} - F(u_p^{\pm})\right) dx \tag{2.38}$$

para todo $p \in (1, \overline{p})$. Dessa forma, se $u_p^{\pm} \to 0$ in $BV(\Omega)$, então (f_3) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue implicam que (2.38) não valeria. Assim, $u_0^{\pm} \neq 0$. Isso finaliza a demonstração do Teorema 5.0.1.

Chapter 6

Método de sub-supersolução para problemas envolvendo o operador 1-laplaciano

Nesse capítulo, abordamos os resultados do trabalho [21]. Mais especificamente, estudamos resultados de existência de solução para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\text{div}\left(\dfrac{Du}{|Du|}\right) + |Du| &= a(x)u + h(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u &\geq 0 \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

onde $N \geq 2$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto, limitado e com fronteira Lipschitz.

Dizemos que uma função $0 \leq u \in BV(\Omega)$ é uma solução de (0.1), se $D^j u = 0$ (onde $D^j u$ é a *jump part* da derivada distribucional Du) e se existe um campo vetorial $\mathbf{z} \in \mathcal{DM}_\infty(\Omega)$ com $|\mathbf{z}|_\infty \leq 1$, tal que

$$\begin{cases} -\text{div } \mathbf{z} + |Du| &= a(x)u + h(x,u) \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \\ (\mathbf{z}, Du) &= |Du| \text{ como medida em } \Omega \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{0.2}$$

Em [31], usando o método de sub-supersolução, os autores lidaram com um problema relacionado a (0.1), considerando o operador $p-$laplaciano, com $1 < p < \infty$, sem o termo gradiente.

Ao longo desse capítulo, vamos supor que a função a satisfaça a seguinte condição

(a_1) $a \in L^\infty(\Omega)$, $a \geq 0$ e $a \neq 0$.

Ainda, h é considerado uma função C^1, não decrescente na variável $t \in \mathbb{R}$, mensurável em $x \in \Omega$, que satisfaz

(h_1) $h(x,0) \geq a(x)$ q.s. em Ω.

(h_2) Existe $1 < r < 1^*$ tal que

$$h(x,t) \leq a(x)(t^{r-1}+1), \text{ para todo } t \geq 0 \text{ e para quase todo } x \in \Omega.$$

Observação 6.0.1 *Observe que, uma vez que $h(x,t)$ é não-decrescente na segunda variável, (h_1) implica que*

$$h(x,t) \geq h(x,0) \geq a(x) \geq (1-t)a(x),$$

para todo $t \geq 0$ e para quase todo $x \in \Omega$.

Nosso principal resultado é o seguinte teorema.

Teorema 6.0.2 *Suponha que as condições (a_1), (h_1) e (h_2) valham. Então, se $|a|_\infty$ é pequeno o suficiente, então o problema (0.1) possui uma solução positiva, ou seja, existem $u \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $u > 0$ e um campo vetorial $\boldsymbol{z} \in \mathcal{DM}_\infty(\Omega)$, tal que $D^j u = 0$ e (0.2) é satisfeita.*

Para provar esse resultado, vamos aplicar o método de sub-supersolução. Esse método consiste em dar uma definição precisa para o que vem a ser uma sub-supersolução para (0.1) e, então, usando uma versão do Princípio de Comparação provado em [24], aplicar o Método de Iteração Monotônica, de forma a provar que entre uma sub e uma supersolução, existe uma solução.

6.1 Decomposição de Du, a Regra da Cadeia em BV e a Fórmula de Green generalizada

Dada $u \in BV(\Omega)$, sabemos que podemos usar o Teorema de Radon-Nikodym para decompor Du como

$$Du = D^a u + D^s u,$$

onde $D^a u$ é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue $\mathcal{L}^N$, enquanto $D^s u$ é singular com respeito à essa medida. Entretanto, nesse capítulo, precisamos estudar de maneira mais profunda a medida $D^s u$, lidando com as *Jump part* e *Cantor part*, denotadas $D^j u$ e $D^c u$, respectivamente. Para defini-las, vamos seguir [1]. Primeiramente, para um dado $u \in BV(\Omega)$, dizemos que $x \in \Omega$ é um *Lebesgue point* para u, se existir $\tilde{u}(x)$ tal que

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho^N} \int_{B_\rho(x)} |u(y) - \tilde{u}(x)| dy = 0. \tag{1.3}$$

Denotamos por S_u o conjunto dos pontos de Ω, os quais **não** são *Lebesgue points*, ou seja, $x \in \Omega \backslash S_u$ se e somente se existe $\tilde{u}(x)$ tal que (1.3) se verifica.

Para uma função $u \in BV(\Omega)$, dizemos que $x \in \Omega$ é um *approximate jump point* se existirem reais $u^-(x) < u^+(x)$ e um vetor $\nu_u \in \mathcal{S}^{N-1}$ tal que

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho^N} \int_{B^{\pm}_\rho(x)} |u(y) - u^{\pm}(x)| dy = 0,$$

onde $B^+_\rho(x) = \{y \in B_\rho(x); \langle y - x, \nu_u \rangle > 0\}$ and $B^-_\rho(x) = \{y \in B_\rho(x); \langle y - x, \nu_u \rangle < 0\}$. O conjunto dos *jump points* de u é denotado por J_u. Pelo Teorema de Federer-Vol'pert (ver [1][Theorem 3.78]), para todo $u \in BV(\Omega)$, S_u é enumerável e $\mathcal{H}^{N-1}-$retificável, ou seja, existe uma quantidade enumerável de hipersuperfícies Lipschitz Γ_k tais que

$$\mathcal{H}^{N-1}\left(S_u \backslash \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Gamma_k\right) = 0.$$

Além disso, $\mathcal{H}^{N-1}(S_u \backslash J_u) = 0$. Denotamos

$$D^j u = D^s u \lfloor J_u \quad \text{e} \quad D^c u = D^s u \lfloor (\Omega \backslash S_u),$$

como *Jump e Cantor parts* de Du, respectivamente. A *jump part* $D^j u$ pode também ser caracterizada como

$$D^j(u) = (u^+ - u^-)\nu_u \mathcal{H}^{N-1} \lfloor J_u.$$

Para um dado $u \in BV(\Omega)$, em vários resultados, é necessário se trabalhar com um representante que surja como o limite de convoluções de u com funções regularizantes. Esse é o chamado *precise representative* de u, denotado por u^* e é definido como sendo igual a $\tilde{u}(x)$, para $x \in \Omega \backslash S_u$ e $(u^+(x) + u^-(x))/2$, se $x \in J_u$. Assim, se $(\rho_\epsilon)_{\epsilon>0}$ é uma família de funções regularizantes, então $u \star \rho_\epsilon \to u^*$ pontualmente, quando $\epsilon \to 0^+$.

Para a abordagem que vamos seguir, será ainda muito importante usar uma versão da Regra da Cadeia para funções em $BV(\Omega)$.

Teorema 6.1.1 (ver [1][Theorem 3.96) *Seja $u \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e $g \in C^1(\mathbb{R})$ uma função lipschitziana. Então $(g \circ u) \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e*

$$D^a(g \circ u) = g'(\tilde{u}) D^a u,$$

$$D^c(g \circ u) = g'(\tilde{u}) D^c u,$$

enquanto

$$D^j(g \circ u) = \left(g(u^+) - g(u^-)\right) \nu_u \mathcal{H}^{N-1} \lfloor J_u.$$

Enquanto o representante preciso de $u \in BV(\Omega)$ é útil para propósitos de regularização, existe um outro representante, o qual se comporta melhor com respeito à Regra da Cadeia em $BV(\Omega)$. Para $g \in C^1(\mathbb{R})$ e $u \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, pelo Teorema 6.1.1 segue que $g(u) \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Além disso, definindo $g(w)^\sharp$ como

$$g(w)^\sharp(x) = \begin{cases} g(\tilde{w}(x)), & \text{se } x \in \Omega \backslash S_w, \\ \dfrac{1}{w^+(x) - w^-(x)} \displaystyle\int_{w^-(x)}^{w^+(x)} g(r)dr, & \text{se } x \in J_w, \end{cases}$$

podemos unificar a notação da Regra da Cadeia, escrevendo

$$D(g(w)) = g'(w)^\sharp Dw. \tag{1.4}$$

Vamos enunciar a seguir uma Fórmula de Green para expressões como $w\,\mathrm{div}(\mathbf{z})$, onde $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\mathrm{div}(\mathbf{z}) \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $w \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Vamos denotar

$$\mathcal{DM}_\infty = \left\{\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N);\ \mathrm{div}(\mathbf{z}) \in \mathcal{M}(\Omega)\right\}.$$

Para $\mathbf{z} \in \mathcal{DM}_\infty$ e $w \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, definimos a distribuição $(\mathbf{z}, Dw) : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ como

$$\langle (\mathbf{z}, Dw), \varphi \rangle := -\int_\Omega w^* \varphi \mathrm{div}(\mathbf{z}) - \int_\Omega w\mathbf{z} \cdot \nabla\varphi dx,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Com essa definição, pode-se provar que $(\mathbf{z}, Dw)$ é uma medida de Radon, tal que

$$\left| \int_B (\mathbf{z}, Dw) \right| \leq |\mathbf{z}|_\infty |Dw|(B),$$

para todo boreliano $B \subset \Omega$.

Para definir um análogo da Fórmula de Green, é necessário também descrever o traço do produto escalar de $\mathbf{z}$ pelo campo normal exterior em $\partial\Omega$. De fato, existe um operador $\gamma : \mathcal{DM}_\infty(\Omega) \to L^\infty(\partial\Omega)$ tal que

$$|\gamma(\mathbf{z})|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq |\mathbf{z}|_\infty$$

e, se $\mathbf{z} \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$,

$$\gamma(\mathbf{z})(x) = \mathbf{z}(x) \cdot \nu(x),$$

sobre $\partial\Omega$. Denotaremos $\gamma(\mathbf{z})$ simplesmente por $[\mathbf{z}, \nu]$. Com essas definições, pode ser provado que a seguinte Fórmula de Green vale para todo $\mathbf{z} \in \mathcal{DM}_\infty(\Omega)$ e $w \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega w^* \mathrm{div}(\mathbf{z}) + \int_\Omega (\mathbf{z}, Dw) = \int_{\partial\Omega} [\mathbf{z}, \nu] w d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{1.5}$$

Pode ainda ser provado a seguinte fórmula do produto (no sentido das distribuições) por $\mathbf{z} \in \mathcal{DM}_\infty(\Omega)$ e $w \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$,

$$\mathrm{div}(w\mathbf{z}) = (\mathbf{z}, Dw) + w^* \mathrm{div}(\mathbf{z}). \tag{1.6}$$

6.2 Resultados técnicos

Dizemos que $(\underline{u}, \overline{u})$ é um par de sub-supersolução para (0.1) se, $\underline{u}, \overline{u} \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $D^j\underline{u} = D^j\overline{u} = 0$, $0 < \underline{u} \leq \overline{u}$ e existem campos vetoriais $\underline{\mathbf{z}}$, $\overline{\mathbf{z}} \in \mathcal{DM}_\infty(\Omega)$, com $|\underline{\mathbf{z}}|_\infty, |\overline{\mathbf{z}}|_\infty \leq 1$, tais que

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\ \underline{\mathbf{z}} + |D\underline{u}| & \leq a(x)\underline{u} + h(x, \underline{u}) \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \\ (\underline{\mathbf{z}}, D\underline{u}) & = |D\underline{u}| \text{ em } \mathcal{M}(\Omega), \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\text{div } \overline{\mathbf{z}} + |D\overline{u}| & \geq a(x)\overline{u} + h(x,\overline{u}) \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \\ (\overline{\mathbf{z}}, D\overline{u}) & = |D\overline{u}| \text{ em } \mathcal{M}(\Omega). \end{cases}$$

O próximo resultado é muito importante para que possamos utilizar o método de sub-supersoluções.

Lema 6.2.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, limitado e com fronteira Lipschitz e seja b uma função não-negativa em $L^q(\Omega)$, para $q > N$. Então existe pelo menos uma solução para o problema*

$$\begin{cases} -div\left(\dfrac{Du}{|Du|}\right) + |Du| & = b(x) \text{ em } \Omega, \\ u & = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.7}$$

Além disso, se

$$|b|_q \leq \left(S|\Omega|^{\frac{1}{q'}-\frac{N-1}{N}}\right)^{-1}, \tag{2.8}$$

então existe uma constante $C = C(N, \Omega, q)$ tal que

$$|u|_\infty \leq C|b|_q^{\frac{1}{p_0-1}}, \tag{2.9}$$

onde p_0 é tal que $1 < p_0 < \dfrac{N}{q'(N-1)}$, o qual existe, uma vez que $q > N$.

Demonstração: Como podemos ver em [24][Theorem 3.2], existe uma solução não-negativa de (2.7), o qual pode ser encontrado como o limite, quando $p \to 1^+$, das soluções do seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |\nabla u|^p & = b(x) \text{ em } \Omega, \\ u & = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.10}$$

Seja $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega)$ uma solução fraca não-negativa, de (2.10), isto é, uma função tal que

$$\int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p \cdot \nabla w + \int_\Omega |\nabla u_p|^p w = \int_\Omega bw, \tag{2.11}$$

para todo $w \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Para $k > 0$, definamos a função real

$$T_k(s) = \begin{cases} k, & \text{se } s > k, \\ s, & \text{se } |s| \leq k, \\ -k, & \text{se } s < -k. \end{cases}$$

Para estabelecer uma estimativa L^∞, vamos usar o Lema de Stampacchia (ver [33][Lemme 4.1]) na função real $k \mapsto |A_k^p|$, onde

$$A_k^p := \{x \in \Omega;\, u_p(x) > k\}.$$

Para isso, vamos necessitar de algumas estimativas em $|A_k^p|$, as quais obtemos considerando como função teste em (2.11), a função $G_k(u_p)$, onde, para $k > 0$, $G_k(s) := s - T_k(s)$. Primeiramente, note que

$$\nabla G_k(u_p)(x) = \begin{cases} \nabla u_p(x), & \text{se } |u_p(x)| > k, \\ 0, & \text{se } |u_p(x)| \leq k, \end{cases}$$

a qual implica que

$$\int_\Omega |\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p \cdot \nabla G_k(u_p) = \int_\Omega |\nabla G_k(u_p)|^p. \tag{2.12}$$

Usando $G_k(u_p)$ como função teste em (2.11) e levando em conta (2.12), temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla G_k(u_p)|^p &\leq \int_\Omega |\nabla G_k(u_p)|^p + \int_\Omega |\nabla u_p|^p G_k(u_p) \\ &= \int_\Omega b G_k(u_p) \\ &\leq |b|_q \left(\int_{A_k^p} |G_k(u_p)|^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \\ &\leq |b|_q |A_k^p|^{\frac{1}{q'} - \frac{N-1}{N}} \left(\int_\Omega |G_k(u_p)|^{\frac{N}{N-1}} \right)^{\frac{N-1}{N}}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde usamos a Desigualdade de Hölder várias vezes acima. Pelas imersões contínuas de $W^{1,1}(\Omega)$ em $L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)$ e, novamente, pela Desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla G_k(u_p)|^p &\leq |b|_q |A_k^p|^{\frac{1}{q'} - \frac{N-1}{N}} S \int_\Omega |\nabla G_k(u_p)| \\ &\leq |b|_q |A_k^p|^{\frac{1}{q'} - \frac{N-1}{N}} S |\Omega|^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla G_k(u_p)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

onde S é a melhor constante para a imersão de $W^{1,1}(\Omega)$ em $L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)$.

Essa última desigualdade implica que

$$\left(\int_\Omega |\nabla G_k(u_p)|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \leq |b|_q |A_k^p|^{\frac{1}{q'} - \frac{N-1}{N}} S |\Omega|^{\frac{p-1}{p}}. \tag{2.14}$$

De (2.14) e (2.8) e, para p_0 tal que $1 < p_0 < \dfrac{N}{q'(N-1)}$ (o qual existe uma vez que $q > N$), segue que

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega |\nabla G_k(u_p)|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(|b|_q |A_k^p|^{\frac{1}{q'}-\frac{N-1}{N}} S\right)^{\frac{1}{p-1}} |\Omega|^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(|b|_q |A_k^p|^{\frac{1}{q'}-\frac{N-1}{N}} S\right)^{\frac{1}{p_0-1}} |\Omega|^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Usando novamente a Desigualdade de Hölder,

$$\int_\Omega |\nabla G_k(u_p)| \leq \left(\int_\Omega |\nabla G_k(u_p)|^p\right)^{\frac{1}{p}} |\Omega|^{\frac{p-1}{p}}. \tag{2.16}$$

De (2.15) e (2.16), temos que

$$\int_\Omega |\nabla G_k(u_p)| \leq \left((|b|_q S)^{\frac{1}{p_0-1}} |\Omega|\right) |A_k^p|^{\left(\frac{1}{p_0-1}\right)\left(\frac{1}{q'}-\frac{N-1}{N}\right)}. \tag{2.17}$$

Novamente pela imersão contínua $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)$, de (2.17) segue que

$$\int_\Omega |G_k(u_p)|^{\frac{N}{N-1}} \leq C(N,\Omega)|b|_q^{\frac{N}{(p_0-1)(N-1)}} |A_k^p|^{\left(\frac{1}{p_0-1}\right)\left(\frac{N}{q'(N-1)}-1\right)}. \tag{2.18}$$

Consideremos $l > k \geq 0$ e, note que, em A_l^p, $G_k(u_p) \geq (l-k)$. Desse fato e de (2.18), temos que

$$\begin{aligned}(l-k)^{\frac{N}{N-1}} |A_l^p| &\leq \int_{A_l^p} |G_k(u_p)|^{\frac{N}{N-1}} \\ &\leq \left(C(N,\Omega)|b|_q^{\frac{N}{(p_0-1)(N-1)}}\right) |A_k^p|^{\left(\frac{1}{p_0-1}\right)\left(\frac{N}{q'(N-1)}-1\right)}, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$|A_l^p| \leq \frac{C(N,\Omega)|b|_q^{\frac{N}{(p_0-1)(N-1)}}}{(l-k)^{\frac{N}{N-1}}} |A_k^p|^{\left(\frac{1}{p_0-1}\right)\left(\frac{N}{q'(N-1)}-1\right)}, \tag{2.19}$$

para todo $l > k > 0$ e $p \in (1, p_0)$. A desigualdade (2.19) e o fato de que

$$\beta = \frac{1}{p_0 - 1}\left(\frac{N}{q'(N-1)} - 1\right) > 1,$$

nos permite usar o Lema de Stampacchia (ver [33][Lemme 4.1]), o qual implica que, para todo $1 < p < p_0$,

$$|A_{d(p)}^p| = 0,$$

onde

$$d(p) = 2^{\frac{\beta}{\beta-1}} C_1(N,\Omega)|b|_q^{\frac{1}{p_0-1}} |A_0^p|^{\beta-1}.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \|u_p\|_\infty &\leq d(p) \\ &\leq C_2(\mathbb{N},\Omega,q)|b|_q^{\frac{1}{p_0-1}} |A_0^p|^{\beta-1} \\ &\leq C_2(\mathbb{N},\Omega,q)|b|_q^{\frac{1}{p_0-1}} |\Omega|^{\beta-1} \\ &\leq C(N,\Omega,q)|b|_q^{\frac{1}{p_0-1}}, \end{aligned}$$

o que finaliza a demonstração. □

Lema 6.2.2 *Sejam c e d duas função não-negativas em $L^1(\Omega)$ com $c \leq d$ q.s. em Ω. Considere os problemas*

$$\begin{cases} -div\left(\dfrac{Du_1}{|Du_1|}\right) + |Du_1| &= c(x) \ \ em \ \ \Omega, \\ u_1 &= 0 \ sobre \ \ \partial\Omega, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -div\left(\dfrac{Du_2}{|Du_2|}\right) + |Du_2| &= d(x) \ \ em \ \ \Omega, \\ u_2 &= 0 \ sobre \ \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Se u_1 for uma solução do primeiro problema e u_2, do segundo, então $u_1 \leq u_2$ q.s. em Ω.

Demonstração: Ver [24, Theorem 3.5]. □

Observação 6.2.3 *Uma consequência direta do último resultado é que a solução mencionada no Lema 6.2.1 é única.*

Lema 6.2.4 *Suponha que valham (a_1), (h_1) e (h_2). Se a função a é tal que $|a|_\infty$ é pequeno o suficiente, então existem $\underline{u}, \overline{u} \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tais que*

i) $0 \leq \underline{u}(x) \leq \overline{u}(x)$ *q.s. em* Ω *with* $\underline{u} \neq 0$.

ii) $\underline{u}$ *é uma subsolução e* $\overline{u}$ *é uma supersolução de* (0.1).

Demonstração: Seja $\underline{u} \in BV(\Omega)$ a única solução não-negativa de

$$\begin{cases} -\text{div}\left(\dfrac{D\underline{u}}{|D\underline{u}|}\right) + |D\underline{u}| &= a(x) \text{ em } \Omega, \\ \underline{u} &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.20}$$

Pelo Lema 6.2.1, se

$$|a|_\infty \leq \left(S|\Omega|^{\frac{2}{q}-\frac{N-1}{N}}\right)^{-1}$$

então a satisfaz (2.8) e, pelo Lema 6.2.1, $\underline{u} \in L^\infty(\Omega)$.

Para provar $i)$, primeiramente, consideremos $\eta > 0$ fixo e tal que

$$0 < \eta|\Omega|^{\frac{1}{q}} < \frac{1}{2}\left(S|\Omega|^{\frac{1}{q'}-\frac{N-1}{N}}\right)^{-1}. \tag{2.21}$$

Agora, consideremos $\overline{u} \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, a única solução do problema

$$\begin{cases} -\text{div}\left(\dfrac{D\overline{u}}{|D\overline{u}|}\right) + |D\overline{u}| &= \eta + a(x) \text{ em } \Omega, \\ \overline{u} &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.22}$$

Então, do Lema 6.2.2, concluímos que $0 \leq \underline{u}(x) \leq \overline{u}(x)$ q.s. em Ω com $\underline{u} \neq 0$, o que prova a condição (i).

Para provar (ii), note que, usando a definição de $\underline{u}$ e a Observação 6.0.1, temos que,

$$\begin{aligned} -\text{div}\left(\frac{D\underline{u}}{|D\underline{u}|}\right) + |D\underline{u}| - a(x)\underline{u} - h(x,\underline{u}) &\leq a(x) - a(x)\underline{u} - h(x,\underline{u}) \\ &\leq (1-\underline{u})a(x) - (1-\underline{u})a(x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que implica que $\underline{u}$ é uma subsolução de (0.1).

Como $\overline{u}$ é uma solução de (2.22), então (h_2) implica que

$$\begin{aligned} -\text{div}\left(\frac{D\overline{u}}{|D\overline{u}|}\right) + |D\overline{u}| - a(x)\overline{u} - h(x,\overline{u}) &= (\eta + a(x)) - a(x)\overline{u} - h(x,\overline{u}) \\ &\geq (\eta + a(x)) - a(x)\overline{u} - a(x) - a(x)\overline{u}^{r-1} \\ &\geq \eta - |a|_\infty(|\overline{u}|_\infty + |\overline{u}|_\infty^{r-1}). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Se $a \in L^\infty(\Omega)$ for tal que

$$0 < |a|_\infty|\Omega|^{\frac{1}{q}} < \frac{1}{2}\left(S|\Omega|^{\frac{1}{q'}-\frac{N-1}{N}}\right)^{-1}, \tag{2.24}$$

então, por (2.21), (2.24) e pela Desigualdade de Minkowski, temos que

$$|\eta + a(\cdot)|_q \leq \left(S|\Omega|^{\frac{1}{q'}-\frac{N-1}{N}}\right)^{-1}.$$

Da última desigualdade e do Lema 6.2.1, temos que

$$|\overline{u}|_\infty \leq C\left(S|\Omega|^{\frac{1}{q'}-\frac{N-1}{N}}\right)^{\frac{-1}{p_0-1}}. \tag{2.25}$$

Por (2.23) e (2.25), segue que

$$\begin{aligned} -\text{div}\left(\frac{D\overline{u}}{|D\overline{u}|}\right) + |D\overline{u}| - a(x)\overline{u} - h(x,\overline{u}) \quad &\geq \quad \eta - |a|_\infty \left(C\left(S|\Omega|^{\frac{1}{q'}-\frac{N-1}{N}}\right)^{\frac{-1}{p_0-1}}\right. \\ &\left. +C^{r-1}\left(S|\Omega|^{\frac{1}{q'}-\frac{N-1}{N}}\right)^{\frac{1-r}{p_0-1}}\right). \end{aligned} \tag{2.26}$$

Consideremos a função real

$$g(t) = \eta - t\left(C\left(S|\Omega|^{\frac{1}{q'}-\frac{N-1}{N}}\right)^{\frac{-1}{p_0-1}} + C^{r-1}\left(S|\Omega|^{\frac{1}{q'}-\frac{N-1}{N}}\right)^{\frac{1-r}{p_0-1}}\right).$$

Note que $g(0) = \eta > 0$ e g é contínua em $t = 0$. Então, por continuidade, existe $\nu > 0$ tal que

$$g(t) > 0, \quad \forall t \in [0, \nu). \tag{2.27}$$

Se considerarmos a função a tal que (2.24) vale e ainda tal que $|a|_\infty \in [0, \nu)$, temos de (2.26) e (2.27), que $\overline{u}$ é uma supersolução de (0.1).

□

6.3 Demonstração do Teorema 6.0.2

Seja $(\underline{u}, \overline{u})$ um par de sub-supersoluções dados pelo Lema 6.2.4. Para provar o Teorema 6.0.2, usamos o Método da Iteração Monotônica para mostrar que, entre $(\underline{u}, \overline{u})$, existe uma solução de (0.1). Para simplificar a notação, para $x \in \Omega$ and $t \in \mathbb{R}$, denotemos

$$f(x,t) = a(x)t + h(x,t).$$

Definimos

$$\tilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(x,\overline{u}(x)), & \text{se } t > \overline{u}(x), \\ f(x,t), & \text{se } \underline{u}(x) \leq t \leq \overline{u}(x), \\ f(x,\underline{u}(x)), & \text{se } t < \underline{u}(x) \end{cases}$$

e note que, como $a \geq 0$ e $t \mapsto h(x,t)$ é não-decrescente, segue que $t \mapsto \tilde{f}(x,t)$ é não-decrescente.

Seja $u_0 = \underline{u}$ e considere o seguinte problema

$$\begin{cases} -\text{div}\left(\dfrac{Du_1}{|Du_1|}\right) + |Du_1| &= \tilde{f}(x,u_0) \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \\ u_1 &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.28}$$

Por [24][Theorem 3.2], existe u_1 uma solução de (3.28), isto é, uma função $u_1 \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que $D^j u_1 = 0$, e um campo vetorial $\mathbf{z}_1 \in \mathcal{DM}_\infty(\Omega)$ tal que $|\mathbf{z}_1|_\infty \leq 1$ e

$$\begin{cases} -\text{div } \mathbf{z}_1 + |Du_1| &= \tilde{f}(x,u_0) \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \\ (\mathbf{z}_1, Du_1) &= |Du_1| \text{ em } \mathcal{M}(\Omega), \\ \\ u_1 &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Como $u_0 = \underline{u}$ é uma subsolução de (0.1), então existe um campo vetorial $\mathbf{z}_0 \in \mathcal{DM}_\infty(\Omega)$ tal que $|\mathbf{z}_0|_\infty \leq 1$ e

$$\begin{cases} -\text{div } \mathbf{z}_0 + |Du_0| &\leq f(x,u_0) \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \\ (\underline{\mathbf{z}_0}, Du_0) &= |Du_0| \text{ em } \mathcal{M}(\Omega), \end{cases}$$

Então, no sentido das distribuições,

$$\begin{aligned} -\text{div } \mathbf{z}_0 + |Du_0| &\leq f(x,u_0) \\ &= \tilde{f}(x,u_0) \\ &= -\text{div } \mathbf{z}_1 + |Du_1| \end{aligned}$$

e, assim, pelo Princípio da Comparação (ver [24][Theorem 3.5]), segue que

$$u_0 \leq u_1 \quad \text{q.s. em } \Omega.$$

Como $\overline{u}$ é uma supersolução de (0.1), segue que, no sentido das distribuições,

$$\begin{aligned} -\text{div } \mathbf{z}_1 + |Du_1| &= \tilde{f}(x, u_0) \\ &\leq \tilde{f}(x, \overline{u}) \\ &= f(x, \overline{u}) \\ &\leq -\text{div } \overline{\mathbf{z}} + |D\overline{u}|. \end{aligned}$$

Então, novamente pelo Princípio da Comparação, segue que $u_1 \leq \overline{u}$ q.s. em Ω. Assim,

$$u_0 \leq u_1 \leq \overline{u} \quad \text{q.s. em } \Omega.$$

Pelos argumentos precedentes, para um dado $k \in \mathbb{N}$ e uma função $u_k \in BV(\Omega)$, tal que $D^j u_k = 0$,

$$\begin{cases} -\text{div } \left(\dfrac{Du_k}{|Du_k|} \right) + |Du_k| = \tilde{f}(x, u_{k-1}) \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \\ (\mathbf{z}_k, Du_k) = |Du_k| \text{ em } \mathcal{M}(\Omega), \\ \\ u_k = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.29}$$

e tal que

$$\underline{u} \leq u_{k-1} \leq u_k \leq \overline{u} \quad \text{q.s. em } \Omega,$$

existe uma função $u_{k+1} \in BV(\Omega)$ tal que $D^j u_{k+1} = 0$ e um campo vetorial $\mathbf{z}_{k+1} \in \mathcal{DM}_\infty(\Omega)$ tal que $|\mathbf{z}_{k+1}|_\infty \leq 1$,

$$\begin{cases} -\text{div } \mathbf{z}_{k+1} + |Du_{k+1}| = \tilde{f}(x, u_k) \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \\ (\mathbf{z}_{k+1}, Du_{k+1}) = |Du_{k+1}| \text{ em } \mathcal{M}(\Omega), \\ \\ u_{k+1} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.30}$$

e

$$0 \leq \underline{u} \leq u_1 \leq u_2 \leq ... \leq u_k \leq u_{k+1} \leq \overline{u} \quad \text{q.s. em } \Omega. \tag{3.31}$$

Lema 6.3.1 *A sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada em $BV(\Omega)$.*

Demonstração: Vamos usar $u_{k+1}^* \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ como função teste em (3.30). Aplicando a Fórmula de Green (ver (1.4)), segue que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |Du_{k+1}| &\leq \int_\Omega (1+u_{k+1}^*)|Du_{k+1}| \\
&= \int_\Omega (\mathbf{z}_{k+1}, Du_{k+1}) + \int_\Omega u_{k+1}^* |Du_{k+1}| \\
&= -\int_\Omega u_{k+1}^* \mathrm{div}\mathbf{z}_{k+1} + \int_\Omega u_{k+1}^* |Du_{k+1}| \\
&= \int_\Omega \tilde{f}(x,u_k)u_{k+1}dx \\
&\leq |\overline{u}|_\infty \int_\Omega f(x,\overline{u})dx.
\end{aligned}$$

Da última desigualdade, vemos que (u_k) é uma sequência limitada em $BV(\Omega)$.

□

Pelo último resultado e pelas imersões de $BV(\Omega)$, segue que existe $u \in BV(\Omega)$ tal que

$$u_k \to u \quad \text{em } L^q(\Omega), \quad \text{quando } k \to +\infty, \tag{3.32}$$

para todo $q \in [1, 1^*)$.

De agora em diante, para mostrar que a função u é de fato uma solução de (0.1), seguiremos os argumentos constantes em [26].

Vamos estudar o comportamento da sequência de campo de vetores $(\mathbf{z}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Primeiramente, note que é uma sequência limitada em $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Então, existe $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ (que de fato satisfaz $|\mathbf{z}|_\infty \leq 1$), tal que

$$\mathbf{z}_k \overset{*}{\rightharpoonup} \mathbf{z} \quad \text{em } L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N).$$

Isso, por outro lado, implica que $\mathbf{z}_k \rightharpoonup \mathbf{z}$ in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, isto é, para todo $\psi \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$,

$$\int_\Omega \mathbf{z}_k \cdot \psi dx \to \int_\Omega \mathbf{z} \cdot \psi dx, \quad \text{quando } k \to +\infty. \tag{3.33}$$

Note que, para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, como $\nabla\varphi \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, por (3.33), temos que

$$\int_\Omega \mathbf{z}_k \cdot \nabla\phi dx \to \int_\Omega z \cdot \nabla\phi dx, \quad \text{as } k \to +\infty,$$

de onde segue que

$$\mathrm{div}\, \mathbf{z}_k \to \mathrm{div}\, \mathbf{z}, \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{3.34}$$

Lema 6.3.2 *O campo vetorial $\boldsymbol{z}$ pertence a $\mathcal{DM}_\infty(\Omega)$.*

Demonstração: De (3.30), (3.32), (3.34) e da semicontinuidade inferior da norma de $BV(\Omega)$ com respeito à convergência de $L^1(\Omega)$, segue que

$$-\operatorname{div}\mathbf{z} + |Du| \leq \tilde{f}(x,u) \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{3.35}$$

Assim, $\mathbf{z} \in \mathcal{DM}_\infty(\Omega)$. □

O próximo resultado é crucial para provar que u é de fato uma solução do problema que estamos estudando.

Lema 6.3.3 *A função u satisfaz*

$$-div\,\boldsymbol{z} + |Du| = f(x,u) \quad em\ \mathcal{D}'(\Omega). \tag{3.36}$$

Demonstração: Primeiramente, vamos descobrir que problema a função $e^{-u_{k+1}}$ satisfaz. Note que, pela Regra da Cadeia para $BV(\Omega)$ (ver (6.1.1)), como $t \mapsto e^{-t}$ é diferenciável,

$$D(e^{-u_{k+1}}) = (e^{-u_{k+1}})^* Du_{k+1}.$$

Então, $e^{-u_{k+1}} \in BV(\Omega)$. Ainda, do fato de que u_k é uma função não-negativa, vemos que $e^{-u_{k+1}} \in L^\infty(\Omega)$. Então podemos aplicar a fórmula do produto (1.6), de forma que

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div}(e^{-u_{k+1}}\mathbf{z}_{k+1}) &= \operatorname{div}((1-e^{-u_{k+1}})\mathbf{z}_{k+1}) - \operatorname{div}\mathbf{z}_{k+1} \\
&= \big(\mathbf{z}_{k+1}, D(1-e^{-u_{k+1}})\big) + (1-e^{-u_{k+1}})^* \operatorname{div}\mathbf{z}_{k+1} - \operatorname{div}\mathbf{z}_{k+1} \\
&= \big|D(1-e^{-u_{k+1}})\big| - (e^{-u_{k+1}})^* \operatorname{div}\mathbf{z}_{k+1} \\
&= (e^{-u_{k+1}})^* |Du_{k+1}| + (e^{-u_{k+1}})^* \left(\tilde{f}(x,u_k) - |Du_{k+1}|\right) \\
&= (e^{-u_{k+1}})\tilde{f}(x,u_k),
\end{aligned} \tag{3.37}$$

em $\mathcal{D}'(\Omega)$ (na igualdade acima, usamos o fato de que $(\mathbf{z}_{k+1}, D(1-e^{-u_{k+1}})) = |D(1-e^{-u_{k+1}})|$, o que pode ser provado como em [26][Remark 3.4]).

Agora, calculando o limite quando $k \to +\infty$ em ambos os lados de (3.37), temos que, no sentido das distribuições

$$-\operatorname{div}(e^{-u_{k+1}}\mathbf{z}_{k+1}) \to -\operatorname{div}(e^{-u}\mathbf{z}), \tag{3.38}$$

como $u_k \to u$ in $L^1(\Omega)$ e $\mathbf{z}_{k+1} \rightharpoonup \mathbf{z}$ in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Além disso,

$$(e^{-u_{k+1}})\tilde{f}(x, u_k) \to (e^{-u})\tilde{f}(x, u), \tag{3.39}$$

uma vez que $u_k \to u$ em $L^1(\Omega)$.

Assim, por (3.37), (3.38) e (3.39), temos que

$$-\text{div}\,(e^{-u}\mathbf{z}) = (e^{-u})\tilde{f}(x, u) \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{3.40}$$

Levando em conta (3.35), (3.40) e pela Regra da Cadeia (1.4), temos que, em $\mathcal{D}'(\Omega)$,

$$\begin{aligned} -\text{div}\,(e^{-u}\mathbf{z}) &= -(e^{-u})^\sharp \text{div}\,\mathbf{z} - \left(z, D(e^{-u})^\sharp\right) \\ &\leq (e^{-u})\tilde{f}(x, u) - (e^{-u})^\sharp |Du| - \left(z, D(e^{-u})^\sharp\right) \\ &\leq (e^{-u})\tilde{f}(x, u) - (e^{-u})^\sharp |Du| + \left|D(e^{-u})\right| \\ &= (e^{-u})\tilde{f}(x, u) \\ &= -\text{div}\,(e^{-u}\mathbf{z}). \end{aligned}$$

Então todas essas desigualdades são, em verdade, igualdades. Em particular,

$$-(e^{-u})^\sharp \text{div}\,\mathbf{z} - \left(z, D(e^{-u})^\sharp\right) = (e^{-u})\tilde{f}(x, u) - (e^{-u})^\sharp |Du| - \left(z, D(e^{-u})^\sharp\right)$$

e então

$$(e^{-u})^\sharp \left(-\text{div}\,\mathbf{z} + |Du|\right) = (e^{-u})\tilde{f}(x, u) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Isso, por outro lado, implica que

$$-\text{div}\,\mathbf{z} + |Du| = \tilde{f}(x, u) = f(x, u) \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega)$$

e isso finaliza a demonstração. □

Vamos agora demontrar outra condição que u satisfaz.

Lema 6.3.4 *A função u e o campo vetorial $\boldsymbol{z}$ satisfazem a seguinte igualdade, no sentido das medidas em Ω,*

$$(\boldsymbol{z}, Du) = |Du|.$$

Demonstração: Seja $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$. Primeiramente, note que

$$\int_\Omega \varphi u^\sharp |Du| \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_\Omega \varphi u_{k+1}|Du_{k+1}|. \tag{3.41}$$

De fato, note que $g(s) = s^2$ é uma função de classe C^1, de forma que, pela Regra da Cadeia (6.1.1), temos que, para todo $w \in BV(\Omega)$, $g(w) \in BV(\Omega)$ e

$$D(g(w)) = g'(w)^\sharp Dw,$$

isto é.,

$$D(w^2) = 2w^\sharp Dw. \tag{3.42}$$

Então, como $D^j u_{k+1} = 0$ e u, $u_{k+1} \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que $|D(u^2)| = 2u^\sharp|Du|$ e $|D(u_{k+1}^2)| = 2u_{k+1}|Du_{k+1}|$. Além disso, como $u_{k+1} \to u$ in $L^1(\Omega)$, então $u_{k+1}^2 \to u^2$ em $L^1(\Omega)$. De fato,

$$\int_\Omega |u^2 - u_{k+1}^2|dx = \int_\Omega |u - u_{k+1}||u + u_{k+1}|dx \leq 2|\overline{u}|_\infty \int_\Omega |u - u_{k+1}|dx = o_k(1),$$

quando $k \to +\infty$. Então, da semicontinuidade inferior da norma de $BV(\Omega)$ com respeito à convergência em $L^1(\Omega)$, temos (3.41).

Em (3.30), consideremos φu_{k+1} como função teste. Então

$$-\int_\Omega u_{k+1}\varphi \mathrm{div}\, \mathbf{z}_{k+1} + \int_\Omega u_{k+1}\varphi|Du_{k+1}| = \int_\Omega \tilde{f}(x, u_k)u_{k+1}\varphi dx.$$

Por (1.6),

$$\begin{aligned}\langle (\mathbf{z}_{k+1}, Du_{k+1}), \varphi\rangle + \int_\Omega u_{k+1}\varphi|Du_{k+1}| &= \int_\Omega \varphi \mathrm{div}\ (u_{k+1}\mathbf{z}_{k+1}) \\ &\quad + \int_\Omega \tilde{f}(x, u_k)u_{k+1}\varphi dx.\end{aligned}$$

Como $(\mathbf{z}_{k+1}, Du_{k+1}) = |Du_{k+1}|$, calculando o limite, quando $k \to +\infty$, usando a semicontinuidade inferior da norma de $BV(\Omega)$ com respeito à convergência de $L^1(\Omega)$ e por (3.41), segue que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi|Du| &\leq \int_\Omega \tilde{f}(x, u)u\varphi dx + \int_\Omega \varphi \mathrm{div}\ (u\mathbf{z}) - \int_\Omega u\varphi|Du| \\ &= \int_\Omega \varphi\left(\mathrm{div}\ (u\mathbf{z}) - u\mathrm{div}\ (\mathbf{z})\right) + \int_\Omega u\varphi|Du| - \int_\Omega u^\sharp\varphi|Du| \\ &= \langle (\mathbf{z}, Du), \varphi\rangle,\end{aligned}$$

onde foi usado que $u^\sharp$ é igual ao representante preciso de u (lembre-se que $g(w)^\sharp$ coincide com o representante preciso se g é uma função afim). Então

$$|Du| \leq (\mathbf{z}, Du)\,, \quad \text{em } \mathcal{M}(\Omega),$$

o que implica que de fato $(\mathbf{z}, Du) = |Du|$, já que a desigualdade contrária segue de [26][Proposition 2.1] e do fato de que $|\mathbf{z}|_\infty \leq 1$.

□

Lema 6.3.5 *A função u satisfaz*

$$D^j u = 0.$$

Demonstração: Como $D^j u$ é absolutamente contínuo com respeito à medida $\mathcal{H}^{N-1}$, por [16][Section 5.9], existe uma quantidade enumerável de hipersuperfícies de classe C^1, $\{\Gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, tais que

$$\mathcal{H}^{N-1}\left(J_u \backslash \cup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k\right) = 0.$$

Então, é suficiente mostrarmos que

$$|D^j u|(\Gamma_k) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.43}$$

Para isso, é suficiente provar que, para todo $x_0 \in \Gamma_k$, existe um aberto U, tal que $x_0 \in U$ e

$$|D^j u|(U \cap \Gamma_k) = 0. \tag{3.44}$$

De fato, supondo (3.44), segue que, para todo compacto $K \subset \Gamma_k$, $|D^j u|(K) = 0$, o que implica em (3.43).

Para mostrar (3.44), vamos escolher um vetor normal ν, tal que $\nu(x) = \nu_u(x)$, q.s. em $\Gamma_k \cap J_u$, com respeito à medida $\mathcal{H}^{N-1}$. Então, considere U um aberto com fronteira suave, tal que $x_0 \in U$ e $\overline{U \cap \Gamma_k} \subset \Omega$. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x + t\nu(x) \notin \partial\Omega$, para todo $x \in U \cap \Gamma_k$ e $t \in (-1/n_0, 1/n_0)$. Agora, para cada $n \geq n_0$, seja

$$U_n = \left\{ x + t\nu(x);\, x \in U \cap \Gamma_k,\, |t| < \frac{1}{n} \right\},$$

e note que

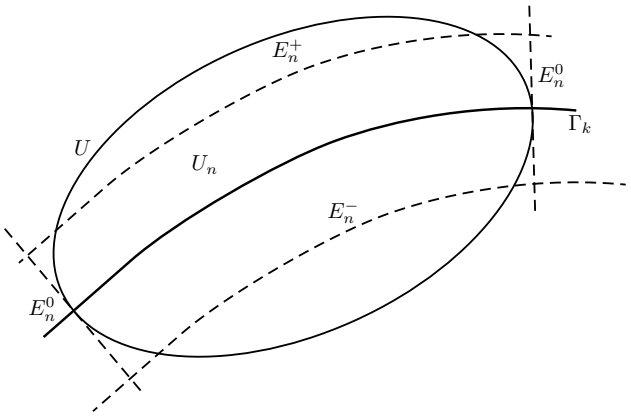
$$\bigcap_{n\geq n_0} U_n = U \cap \Gamma_k.$$

Além disso, para uso futuro, vamos dividir ∂U_n em três partes

$$\partial U_n = E_n^+ \cup E_n^- \cup E_n^0,$$

onde

$$E_n^{\pm} \subset \left\{ x \pm \frac{1}{n}\nu(x);\, x \in U \cap \Gamma_k \right\}.$$



Como a igualdade em (3.36) pode ser vista no sentido das medidas, segue que, depois de multiplicar ambos os lados por u^*,

$$-\int_{U_n} u^* \mathrm{div}(\mathbf{z}) + \int_{U_n} u^* |Du| = \int_{U_n} f(x,u)u dx.$$

Pela Fórmula de Green (1.4) e pelo Lema 6.3.4, segue que

$$\int_{U_n} |Du| - \int_{\partial U_n} u[\mathbf{z},\eta] d\mathcal{H}^{N-1} + \int_{U_n} u^* |Du| = \int_{U_n} f(x,u)u dx,$$

o que implica que

$$\int_{U_n} (1+u^*)|Du| - \int_{\partial U_n} u[\mathbf{z},\eta] d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{U_n} f(x,u)u dx, \tag{3.45}$$

onde η denota o vetor normal exterior a ∂U_n. Para calcular o limite, quando $n \to +\infty$, vamos analisar

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\partial U_n} u[\mathbf{z},\eta] d\mathcal{H}^{N-1},$$

uma vez que, trivialmente, vemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{U_n} (1+u^*)|Du| = \int_{U\cap\Gamma_k} (1+u^*)|Du| \tag{3.46}$$

e

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{U_n} f(x,u)udx = \int_{U\cap\Gamma_k} f(x,u)udx = 0. \tag{3.47}$$

Note que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{E_n^{\pm}} u[\mathbf{z},\eta]d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{U\cap\Gamma_k} u^{\pm}[\mathbf{z},\eta]d\mathcal{H}^{N-1},$$

enquanto

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{E_n^0} u[\mathbf{z},\eta]d\mathcal{H}^{N-1} = 0,$$

uma vez que

$$\bigcap_{n\geq n_0} E_n^0 = \partial(U\cap\Gamma_k) \quad \text{e} \quad \mathcal{H}^{N-1}(\partial(U\cap\Gamma_k)) = 0.$$

Assim, segue que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\partial U_n} u[\mathbf{z},\eta]d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{U\cap\Gamma_k}(u^+ - u^-)[\mathbf{z},\eta]d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{3.48}$$

Considerando (3.45), (3.46), (3.47) e (3.48), segue que

$$\int_{U\cap\Gamma_k}(1+u^*)|Du| = \int_{U\cap\Gamma_k}(u^+ - u^-)[\mathbf{z},\eta]d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{3.49}$$

No lado esquerdo de (3.49), podemos substituir $|Du|$ por $|D^j u|$ uma vez que, por [1][Proposition 3.92], $D^a u$ e $D^c u$ se anulam em Γ_k. Então, (3.49) implica que

$$\begin{aligned}
\int_{U\cap\Gamma_k}(1+u^*)|D^j u| &= \int_{U\cap\Gamma_k}(1+u^*)|Du| \\
&\leq \left|\int_{U\cap\Gamma_k}(u^+ - u^-)[\mathbf{z},\eta]d\mathcal{H}^{N-1}\right| \\
&\leq \int_{U\cap\Gamma_k}|u^+ - u^-|d\mathcal{H}^{N-1} \\
&= \int_{U\cap\Gamma_k}|D^j u|,
\end{aligned}$$

o que implica que $\int_{U\cap\Gamma_k} u^*|D^j u| \leq 0$. Como o integrando é não-negativo, segue que

$$u^*|D^j u|\lfloor(U\cap\Gamma_k) = 0. \tag{3.50}$$

Por outro lado, levando em conta que $u^* = \frac{1}{2}(u^+ + u^-)$ em J_u, segue que

$$\begin{aligned}
u^*|D^j u| &= \frac{1}{2}(u^+ + u^-)(u^+ - u^-)\mathcal{H}^{N-1}\lfloor(U\cap\Gamma_k\cap J_u) \\
&= \frac{1}{2}((u^+)^2 - (u^-)^2)\mathcal{H}^{N-1}\lfloor(U\cap\Gamma_k\cap J_u).
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Finalmente, por (3.50) e (3.51) segue que $u^+ = u^-$ q.s. em $U\cap\Gamma_k\cap J_u$, com respeito à medida $\mathcal{H}^{N-1}$. Assim, pela definição de $D^j u$, temos (3.44). □

Lema 6.3.6 *A função u se anula q.s. em $\partial\Omega$, com respeito à medida $\mathcal{H}^{N-1}$.*

Demonstração: Primeiramente, vamos usar $u_{k+1}^\sharp$ como função teste em (3.30), do que segue que

$$-\int_\Omega u_{k+1}^\sharp \text{div } \mathbf{z}_{k+1} + \int_\Omega u_{k+1}^\sharp |Du_{k+1}| = \int_\Omega \tilde{f}(x,u_k)u_{k+1} + o_k(1).$$

Pela Fórmula de Green (1.4) e levando em conta que $u_{k+1} = 0$ q.s. em $\partial\Omega$ com respeito à medida $\mathcal{H}^{N-1}$ e $(\mathbf{z}_{k+1}, u_{k+1}) = |Du_{k+1}|$, temos que

$$\int_\Omega |Du_{k+1}| + \int_\Omega u_{k+1}^\sharp |Du_{k+1}| = \int_\Omega \tilde{f}(x,u_k)u_{k+1} + o_k(1).$$

Como os funcionais $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 : BV(\Omega) \to \mathbb{R}$, dados por $\mathcal{J}_1(w) = \int_\Omega |Dw| + \int_{\partial\Omega} |w| d\mathcal{H}^{N-1}$ e $\mathcal{J}_2(w) = \int_\Omega w^\sharp |Dw| + \int_{\partial\Omega} \frac{w^2}{2} d\mathcal{H}^{N-1}$ são semicontínuos inferiormente com respeito à convergência de $L^1(\Omega)$ e $u_{k+1} \to u$ em $L^1(\Omega)$, pela Fórmula de Green (1.4) e (3.36), segue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} + \int_\Omega u^\sharp |Du| + \int_{\partial\Omega} \frac{u^2}{2} d\mathcal{H}^{N-1} &\leq \int_\Omega \tilde{f}(x,u)u dx \\
&= -\int_\Omega u^\sharp \text{div } \mathbf{z} + \int_\Omega u^\sharp |Du| \\
&= \int_\Omega |Du| - \int_{\partial\Omega} [\mathbf{z}, \nu] u^\sharp d\mathcal{H}^{N-1} \\
&\quad + \int_\Omega u^\sharp |Du|.
\end{aligned}$$

Então, temos que

$$\int_{\partial\Omega} \left(|u| + [\mathbf{z}, \nu] u^\sharp \right) d\mathcal{H}^{N-1} + \int_{\partial\Omega} \frac{u^2}{2} d\mathcal{H}^{N-1} \leq 0.$$

A segunda integral acima é claramente positiva, enquanto a primeira é também positiva, uma vez que

$$|[\mathbf{z}, \nu]|_\infty \leq |\mathbf{z}|_\infty \leq 1.$$

Assim, $u = 0$ q.s. em $\partial\Omega$, com respeito à medida $\mathcal{H}^{N-1}$. □

Pelos Lemas 6.3.3, 6.3.4, 6.3.5 e 6.3.6, segue que u de fato é uma solução de (0.1). Assim, o Teorema 6.0.2 está demonstrado.

Bibliography

[1] L. Ambrosio, N. Fusco and D. Pallara, *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, Oxford University Press., Oxford (2000).

[2] F. Andreu, C. Ballester, V. Caselles and J. M. Mazón, *The Dirichlet problem for the total variation flow*, J. Functional Anal., 180, No. 2, 347 - 403 (2001).

[3] F. Andreu, C. Ballester, V. Caselles and J. M. Mazón, *Minimizing total variation flow*, C. R. Acad. Sci., Paria, Sr. I, Math., 331, No. 11, 867 - 872 (2000).

[4] F. Andreu, C. Ballester, V. Caselles and J. M. Mazón, *Minimizing total variation flow*, Differential Integral Equations, 14, No. 3, 321 - 360 (2001).

[5] F. Andreu, V. Caselles and J. M. Mazón, *Parabolic quasilinear equations minimizing linear growth functionals*, Progress in mathematics, 233. Birkhäuser Verlag, Basel (2004).

[6] G. Anzellotti, Pairings between measures and bounded functions and compensated compactness, Ann. Mat. Pura Appl., 4, No. 135, 293 - 318 (1983).

[7] Anzellotti, G. The Euler equation for functionals with linear growth, Trans. Amer. Math. Soc., 290, No 2, 483 - 501 (1985).

[8] Attouch, H., B. Buttazzo and G. Michaille, *Variational analysis in Sobolev and BV spaces. Applications to PDEs and optimization*, MPS/SIAM Series on Optimization, 6, Philadelphia, 2006.

[9] S. Barile and M. T. O. Pimenta, *Some existence results of bounded variation solutions to* $1-$*biharmonic problems*, J. Math. Anal. Appl., 463, 726 - 743 (2018).

[10] S. Barile and G. M. Figueiredo, *Existence of a least energy nodal solution for a class of p&q−quasilinear elliptic equations*, Adv. Nonlinear Stud., 14, No. 2, 511 - 530 (2014).

[11] H. Brezis and A. Ponce, *Kato's inequality up to the boundary*, Commun. Contemp. Math., 10, No. 6, 1217 - 1241 (2008).

[12] K. Chang, *Variational methods for non-differentiable functionals and their applications to partial differential equations*, J. Math. Anal. Appl., 80, 102 - 129 (1981).

[13] Y. Chen, S. Levine and M. Rao, *Variable exponent, linear growth functionals in image restoration*, SIAM J. Appl. Math., 66, 1383 - 1406 (2006).

[14] F. Clarke, *Generalized gradients and applications*, Trans. Amer. Math. Soc., 205, 247 - 262 (1975).

[15] S. Conti, D. Faraco and F. Maggi, *A new approach to counterexamples to L^1 estimates: Kornś inequality, geometric rigidity, and regularity for gradients of separately convex functions*, Arch. Ration. Mech. Anal., 175, 287 - 300 (2005).

[16] L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, Boca Raton, (1992).

[17] G. M. Figueiredo and M. T. O. Pimenta, *Nehari method for locally Lipschitz functionals with examples in problems in the space of bounded variation functions*, Nonlinear Differ. Equ. Appl., 25, No. 6, 18 (2018).

[18] G. M. Figueiredo and M. T. O. Pimenta, *Strauss' and Lions' type results in $BV(\mathbb{R}^N)$ with an application to $1-$Laplacian problem*, Milan J. Math, 86, No. 1, 15 - 30 (2018).

[19] G. M. Figueiredo and M. T. O. Pimenta, *Existence of bounded variation solutions for a $1-$Laplacian problem with vanishing potentials*, J. Math. Anal. Appl., 459, 861 - 878 (2018).

[20] G. M. Figueiredo and M. T. O. Pimenta, *Nodal solutions to quasilinear elliptic problems involving the 1-laplacian operator via variational and approximation methods*, to appear in Indiana Univ. Math. J.

[21] G. M. Figueiredo and M. T. O. Pimenta, *Sub-supersolution method for a quasilinear elliptic problem involving the* $1-$*Laplacian operator and a gradient term*, J. Funct. Anal., 278, No. 3, 108325 (2020).

[22] E. Giusti, E. *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Monographs in Mathematics, 80, Birkhäuser Verlag, Basel, (1984).

[23] B. Kawohl and F. Schuricht, *Dirichlet problems for the* $1-$*Laplace operator, including the eigenvalue problem*, Commun. Contemp. Math., 9, 515 - 543 (2007).

[24] M. Latorre and S. Segura de León, *Existence and Comparison results for an elliptic equation involving 1-Laplacian and* L^1*-data*, J. Evol. Equ., Vol. 18, 1-28 (2018).

[25] S. Littig and F. Schuricht, *Convergence of the eigenvalues of the* $p-$*Laplace operator as* p *goes to 1*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 49, 707 - 727 (2014).

[26] J.M. Mazón and S. Segura de León, *The Dirichlet problem fo a singular elliptic equation arising in the level set formulation of the inverse mean curvature flow*, Adv. Calc.Var., Vol. 6, 123-164 (2013).

[27] Z. Milbers, *Eigenvalue problem for the* $1-$*Laplace operator*, Tese de doutorado. 241.

[28] M. Miranda, *Dirichlet problem with* L^1 *data for the non-homogeneous minimal surface equation*, Indiana Univ. Math. J., 24, 227 - 241 (1974/75).

[29] F. Obersnel and P. Omari, *Positive solutions of the Dirichlet problem for the prescribed mean curvature equation*, J. Differential Equations, 249, 1674 - 1725 (2010).

[30] E. Parini, B. Ruf and C. Tarsi, *The eigenvalue problem for the* $1-$*biharmonic problem*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 13, No. 5, 307 - 322 (2014).

[31] K. Perera and E.A.B. Silva, *Existence and multiplicity of positive solutions for singular quasilinear problems*, J. Math. Anal. Appl., Vol. 323, 1238 - 1252 (2006).

[32] M. Squassina, *On Palais' principle for non-smooth functionals*, Nonlinear Anal., 74, 3786 - 3804 (2011).

[33] G. Stampacchia, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, Vol. 15, No. 1, 189 - 258 (1965).

[34] A. Szulkin, *Minimax principles for lower semicontinuous functions and applications to nonlinear boundary value problems*, Ann. Inst. H. Poincaré, Sec. C, 3, No 2, 77 - 109 (1986).

[35] D. Gilbarg and N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, Berlin Heilderberg, (2001).